

В. А. Копнов

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССАМИ
ДЕГРАДАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. А. Копнов

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ПРОЦЕССАМИ ДЕГРАДАЦИИ
ЭЛЕМЕНТОВ
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Екатеринбург
РГПУ
2017

ISBN 978-5-8050-0621-1



9 785805 006211

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВО «Российский государственный профессионально-педагогический университет»

В. А. Копнов

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССАМИ ДЕГРАДАЦИИ
ЭЛЕМЕНТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Монография

© ФГАОУ ВО «Российский государственный
профессионально-педагогический университет», 2017

ISBN 978-5-8050-0621-1

Екатеринбург
РГППУ
2017

УДК 621-192
ББК К414
К 65

Копнов, Виталий Анатольевич.

К 65 Оптимальное управление процессами деградации элементов механических систем [Электронный ресурс]: монография / В. А. Копнов. Екатеринбург: Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2017. 305 с. Режим доступа: <http://elar.rsvpu.ru/handle/123456789/21714>.
ISBN 978-5-8050-0621-1

Описываются модели оптимального управления процессами деградации элементов механических систем, используемые для решения ряда задач управления надежностью. Рассматриваются методы управления наблюдаемыми и ненаблюдаемыми процессами деградации систем одно- и многократного действия. Предложены унифицированные алгоритмы моделирования процессов деградации.

Адресуется научным работникам, преподавателям и специалистам в области управления надежностью, а также студентам, изучающим теорию управления надежностью.

Имеет интерактивное оглавление в виде закладок.

Рецензенты: кандидат физико-математических наук М. Г. Близоруков (ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»); профессор, доктор технических наук Б. Н. Гузанов (ФГАОУ ВО «Российский государственный профессионально-педагогический университет»)

Системные требования: Windows XP/2003; программа для чтения pdf-файлов Adobe Acrobat Reader

Научное издание

Редактор О. Е. Мелкозерова; компьютерная верстка Н. А. Ушениной

Утверждено постановлением редакционно-издательского совета университета

Подписано к использованию 04.09.17.

Текстовое (символьное) издание (1,24 Мб).

Издательство Российского государственного профессионально-педагогического университета. Екатеринбург,
ул. Машиностроителей, 11.

© ФГАОУ ВО «Российский государственный
профессионально-педагогический университет», 2017

Оглавление

Введение.....	7
Глава 1. Задачи оптимального управления процессами деградации.....	10
1.1. Управление надежностью элементов механических систем.....	13
1.2. Модели деградации элементов механических систем	16
1.3. Модели эксплуатации технических систем.....	19
1.3.1. Стратегии и политики эксплуатации	20
1.3.2. Функционалы качества.....	22
1.4. Расчеты на сопротивление усталости	24
1.4.1. Оценка долговечности на основе анализа локальных на- пряжений и деформаций.....	28
1.4.2. Влияние сложного напряженного состояния на усталост- ную долговечность.....	32
1.4.3. Модели накопления усталостных повреждений.....	35
1.4.4. Функции распределения характеристик сопротивления усталости.....	40
1.4.5. Анализ процессов нагружения	42
Глава 2. Оптимальное управление ненаблюдаемыми процессами де- градации	47
2.1. Априорное определение правил остановки по функции рас- пределения ресурса	47
2.1.1. Основное соотношение между математическими ожида- ниями интенсивности затрат.....	48
2.1.2. Стратегия восстановления в зависимости от возраста	51
2.1.3. Простейший функционал качества	53
2.1.4. Система однократного действия	54
2.1.5. Система многократного действия	58
2.2. Оптимальная остановка ненаблюдаемого процесса деградации	61
2.2.1. Последовательная переоценка плотности распределения остаточного ресурса.....	61
2.2.2. Линейная модель накопления усталостных повреждений при регулярной истории нагружения.....	64
2.2.3. Оптимальное правило остановки при регулярной истории нагружения.....	68
2.2.4. Оптимальное правило остановки при нерегулярной исто- рии нагружения	73
Глава 3. Оптимальное управление наблюдаемыми процессами дег- радации в классе двухуровневых политик	77
3.1. Полумарковские процессы деградации	78

3.1.1. Задание процесса деградации	78
3.1.2. Двухуровневые политики управления	79
3.1.3. Функционал качества.....	81
3.1.4. Уравнения марковского восстановления.....	82
3.1.5. Процесс накопления	83
3.2. Процесс гибели.....	89
3.2.1. Вычисление характеристик функционала стоимости	90
3.2.2. Коэффициент готовности	94
3.2.3. Асимптотическая функция надежности	95
3.2.4. Численное моделирование управления процессом коррозии.....	96
3.3. Управление цепью Маркова для элементов однократного действия.....	98
3.3.1. Вычисление характеристик функционала стоимости	99
3.3.2. Простейшая марковская цепь	101
3.3.3. Моделирование роста трещины.....	105
Глава 4. Индивидуальные кривые усталости: прямая задача.....	108
4.1. Метод рандомизации предела выносливости	109
4.1.1. Логнормальное распределение	111
4.1.2. Модели индивидуальных кривых усталости	111
4.1.3. Накопление повреждений	116
4.2. Оценка распределений ресурса	117
4.2.1. Формулы для вычисления характеристического ресурса.....	118
4.2.2. Исследование функций характеристического ресурса	119
4.2.3. Численный метод нахождения функции распределения ресурса.....	124
4.3. Прогнозирование остаточного ресурса.....	126
4.4. Экспериментальная проверка достоверности моделей.....	127
4.4.1. Данные Рихарта – Ньюмарка	128
4.4.2. Данные Долана – Брауна	133
4.5. Сравнение расчетов по предлагаемым моделям с известными методиками	134
4.5.1. Сварной узел путевой машины.....	134
4.5.2. Вал редуктора механизма поворота порталного крана	137
4.5.3. Приводной вал механизма передвижения напольной зава-лочной машины	139
4.5.4. Соответствие моделей экспериментальным расчетам	141
Глава 5. Индивидуальные кривые усталости: обратная задача.....	143
5.1. Исходные предпосылки.....	143
5.2. Основные предположения и существование индивидуальных кривых усталости	145

5.3. Форма индивидуальных кривых усталости.....	148
5.3.1. Общая форма индивидуальных кривых усталости	148
5.3.2. Преимущество моделей.....	150
5.3.3. Линейная индивидуальная кривая усталости	151
5.4. Соотношение между индивидуальными и квантильными кривыми усталости.....	152
5.5. Прогнозирование ресурса.....	154
5.5.1. Линейное накопление повреждений при двухуровневом нагружении	155
5.5.2. Функция распределения остаточного ресурса	156
5.5.3. Распределение ресурса при стационарном процессе нагружения	162
5.6. Некоторые основные определения и формулировки теории вероятностей.....	164
Глава 6. Алгебраический подход к моделированию процессов деградации.....	167
6.1. Моделирование накопления повреждений с помощью алгебраических автоматов.....	168
6.1.1. Полугруппы историй нагружения	168
6.1.2. Алгебраические автоматы.....	169
6.1.3. Обсуждение	172
6.2. Техника объектно-ориентированного программирования	173
6.2.1. Входной сигнал	174
6.2.2. Состояние.....	174
6.2.3. Выходной сигнал.....	175
6.3. Рандомизированный автомат.....	177
Глава 7. Оптимизация и прогнозирование ресурса деталей и узлов машин	181
7.1. Предельно допустимый уровень процесса деградации элемента, моделируемый марковской цепью	181
7.1.1. Моделирование износа вкладыша шпинделя.....	182
7.1.2. Проверка гипотез	185
7.1.3. Оптимальный предельный уровень для процесса деградации вкладыша	191
7.1.4. Оптимальный предельный уровень для процесса деградации рамных пил	195
7.2. Прогнозирование ресурса элементов металлоконструкции козлового крана.....	200
7.2.1. Анализ работы крана ЛТ-62Б с хлыстами на нижних складах	200
7.2.2. Результаты натурного тензометрирования	206
7.2.3. Анализ нагруженности элементов металлоконструкции	209

7.2.4. Коэффициенты концентрации напряжений и данные о выносливости элементов.....	213
7.2.5. Прогнозирование распределения ресурса элементов металлоконструкции крана.....	215
7.3. Функции сопротивления усталости конвейерных лент при сдвиговых деформациях.....	216
7.3.1. Функции сопротивления усталости	218
7.3.2. Описание экспериментов	227
7.3.3. Обработка экспериментальных данных	230
7.3.4. Моделирование закона распределения.....	237
7.4. Оптимизация начальной высоты печатающих элементов узлов для поперечного линования тетрадных агрегатов.....	242
7.5. Простая байесовская процедура последовательной оценки плотности распределения длин трещин.....	248
7.5.1. Два основных вероятностных пространства	248
7.5.2. Выводы в случае нормального распределения	250
7.5.3. Выводы в случае логнормального распределения	253
Глава 8. Использование датчиков усталостного повреждения для оценки истории нагружения.....	257
8.1. Описание работы датчиков усталостного повреждения.....	257
8.2. Усталостное поведение датчиков.....	267
8.2.1. Методы тарировки	268
8.2.2. Датчики усталостного повреждения из константановой фольги.....	270
8.2.3. Многокомпонентные полупроводниковые тензорезисторы	273
8.3. Нерегулярное нагружение датчиков	274
8.4. Аппроксимация зависимостей.....	277
8.5. Умножитель деформаций для датчика	280
8.6. Возможности использования кассетных счетчиков	284
8.7. Инструкция по изготовлению умножителя деформаций и наклею на него датчика усталостного нагружения	290
Библиографический список.....	295

Введение

Опыт последних 30 лет развития теории управления надежностью механических систем свидетельствует о необходимости дальнейшего углубления и расширения использования моделей случайных процессов при решении задач механики. Параллельно актуализировались задачи обеспечения надежности сложных технических систем за счет оптимизации режимов эксплуатации и технического обслуживания. Эти направления обладают общими чертами и подразумевают использование теории управляемых случайных процессов. Основное различие состоит в том, что в первом случае привлекаются знания из динамики и прочности машин, а во втором речь идет о более абстрактных объектах. Общим является использование развитых методов теории вероятности и математической статистики. Взаимное обогащение идеями и методами решения задач этих направлений исследований открывает новые возможности создания более совершенных машин и конструкций.

Любые механические системы рано или поздно отказывают – по различным причинам. Развитие в элементах механических систем процессов деградации – таких, как износ, накопление различного рода повреждений, рост трещин, – неизбежно приводит к их отказам. Даже высоконадежные системы, используемые в авиации и космонавтике, не гарантируют полностью безотказную работу до конца срока службы. Экономически целесообразно создавать такие изделия, которые имели бы в своем составе электронные системы мониторинга состояния и различные предохранительные устройства, не допускающие крупных аварий, аварийных ситуаций. Управление процессами деградации на основании эксплуатационного мониторинга позволит повысить эффективность использования современной техники. С другой стороны, создание методов и алгоритмов оптимального управления процессами деградации дает теоретическую основу для разработки и внедрения различных средств мониторинга состояния изделий. При этом происходит также переосмысление задач проектирования самих изделий, когда в самом начале их разработки закладывается идея об управлении надежностью на всем протяжении жизненного цикла. Все вышесказанное предопределяет необходимость постановки и решения новых задач управления надежностью механических систем, в основе которых лежит потребность в управлении тем или иным образом процессами деградации элементов механических систем.

В монографии описывается новая концепция решения задач управления надежностью механических систем, в основе которой лежит идея необходимости детализации постановки задач и привлечения требуемых моделей надежности из экспериментальной механики разрушения и технического обслуживания систем. Решение подобных задач основывается на разработанных методах оптимального управления процессами деградации. Использование в политике управления надежностью в явном виде состояний деградирующих элементов механических систем привело к тому, что потребовалось создание взаимосвязанных моделей управления надежностью и процессов деградации. Показано, что имеются существенные различия в задачах оптимизации надежности систем однократного и многократного действия. Функционалы качества управления для систем однократного действия при определенных условиях являются мажорирующими для подобных же функционалов качества систем многократного действия.

Решения задач управления процессами деградации получены для двух основных классов процессов: наблюдаемых и ненаблюдаемых. Для наблюдаемого случая предложены схемы управления процессами марковского типа в классе двухуровневых политик управления, когда есть возможность прямого или косвенного наблюдения за процессами и назначения предупреждающего допуска в зависимости от состояния процесса деградации. Состояние отказа и величина восстановления также относятся к оптимизируемым параметрам. Для построения марковских цепей по экспериментальным данным разработаны специализированные алгоритмы формирования матриц переходных вероятностей на основе проверки гипотез по критерию максимального правдоподобия и критерию хи-квадрат. Возможно использовать данный подход для процессов коррозии и усталостного роста трещин.

Для ненаблюдаемого случая предложены алгоритмы управления процессами деградации на основе оптимальных правил остановки случайных последовательностей.

С целью создания развитых моделей деградации и прогнозирования ресурса разработана концепция накопления усталостных повреждений на основе индивидуальных кривых усталости. Для формирования стохастических моделей индивидуальных кривых усталости использованы две основные задачи механики: прямая и обратная. Статистическое исследование феномена существования индивидуальных кривых усталости проведено по

экспериментальным данным Рихарта – Ньюмарка и Долана. Сравнительные расчеты проведены для сварного узла путевой машины, вала редуктора механизма поворота порталного крана, приводного вала механизма передвижения напольной завалочной машины. Существование индивидуальных кривых усталости доказано посредством теоремы Колмогорова о существовании случайных функций. Также доказана логнормальность распределения ресурса при стационарном нагружении при определенных условиях. Сформировано общее понятие индивидуальности характеристик элементов механических систем и получена подобная структура для конвейерных лент посредством введения индивидуальных функций сопротивления усталости при сдвиговом циклическом нагружении.

С целью унификации и упрощения использования моделей деградации в задачах управления разработана методика моделирования процессов деградации с помощью алгебраических автоматов, выводящая в конечном итоге на современные методы объектно-ориентированного проектирования и программирования.

Методы оптимального управления процессами деградации и прогнозирования ресурса продемонстрированы как на иллюстративных примерах, так и на различных элементах механических систем: вкладыш шпинделя стана горячей прокатки 2500ГП, режущий инструмент лесопильных рам РД 75/6/7, сварные узлы металлоконструкции козловых кранов ЛТ-62Б, резинотканевые конвейерные ленты, сварной узел несущей системы путевой машины, вал редуктора механизма поворота порталного крана, приводной вал механизма передвижения напольной завалочной машины.

Глава 1. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ ДЕГРАДАЦИИ

Корректное решение задачи обеспечения надежности машин и конструкций на стадиях проектирования, отработки и эксплуатации позволяет повысить экономическую эффективность как проектируемых, так и эксплуатируемых изделий. Около 80 % всех отказов машин, аппаратов и конструкций возникает по причине накопления в них различного рода повреждений [5].

Общая ситуация с обеспеченностью литературой по вопросам надежности механических систем такова. К середине 1980-х гг. ощущался недостаток литературы по расчету надежности машин [87], что привело к появлению в 80–90-х гг. прошлого века ряда справочников и монографий, посвященных комплексному решению этой проблемы [1, 9, 25, 36, 66, 82], авиационным конструкциям [7, 71, 72], судовым конструкциям [59, 60], металлургическому оборудованию [21, 40, 41], подъемно-транспортным машинам [10, 30, 90, 92], автомобильному транспорту [31] и др.

В данной работе приводятся результаты исследований моделей надежности, методов управления надежностью механических систем (МС), используемых при решении задач проектирования изделий и мониторинга их состояния в процессе эксплуатации.

Любая механическая система может быть охарактеризована конечным числом измеримых свойств, соответствующих ее назначению, например, вероятностью безотказной работы, ресурсом и т. д. При эксплуатации МС под воздействием также измеримых внешних факторов (механической нагрузки, температуры, химического воздействия и т. д.) происходит изменение этих свойств, которое принято называть деградацией [44, 56]. Физическими примерами явления деградации могут служить усталостное накопление повреждений, рост трещин, износ, коррозия и т. п.

Традиционное название «накопление повреждений» является общепринятым в механике, скорее, для процессов усталостного разрушения. Такие же процессы повреждения, как ползучесть, износ или коррозия, обычно изучаются отдельно. С точки зрения надежности все эти процессы можно отнести к одному классу – процессам деградации, приводящим к изменению состояния элементов МС. В некоторых случаях термины «накоп-

ление повреждений» и «деградация» можно считать синонимами. Однако при абстрагировании от конкретной природы процесса в задачах управления надежностью предпочтительнее использовать единое понятие – «деградация». В этом случае возможно моделировать данные явления как математические объекты, имеющие лишь определенные отличия от общего класса случайных процессов и характеризующиеся своим уникальным поведением в пространстве состояний, т. е. одинаково.

Деградация элементов МС приводит в конечном итоге к их отказу или, возможно, к отказу всей системы в целом, что влечет за собой значительный экономический ущерб. С другой стороны, остановка эксплуатации и восстановление свойств механической системы до момента ее отказа также могут вызвать существенные потери, поскольку может остаться невыработанной значительная часть ресурса системы. Учет такого рода противоречий при разработке политики эксплуатации элементов МС приводит к постановке задач оптимального управления процессами деградации, связанных прежде всего с прогнозированием остаточного ресурса, надежностью и стоимостью эксплуатации изделий. Существующие методы технического обслуживания машин базируются на методах оптимального управления стохастическими процессами в пространстве состояний объекта [55]. Данное пространство формируется, как правило, из таких состояний, как отказ, рабочие состояния, неполный отказ и т. д., и лишь косвенно отражает внутреннее состояние объекта – его деградирующие свойства.

Знание величины (меры) деградации элемента МС должно служить основанием для принятия решения о дальнейшей эксплуатации МС. Простейшая постановка задачи – измерение деградации по наработке. Например, величина деградации грузовика может измеряться в пройденных милях за месяц [137]. Возможно также измерять количество взлетов и посадок самолета, часы наработки и т. п.

Очень часто состояние всей системы связывается с состоянием каких-либо ее основных элементов. Например, состояние станка – с износом режущего инструмента, прокатного стана – с износом валков, грузоподъемного крана – с накопленным повреждением металлоконструкций и т. д. Поэтому можно на первом этапе создания подобных методов оптимального управления ограничиться рассмотрением только однопараметрических задач.

Кроме того, модели оптимального управления процессами деградации подразумевают использование соответствующих технических средств,

которые бы позволяли непосредственно отслеживать внутреннее состояние объекта и управлять его эксплуатацией, основываясь на этих знаниях. И именно датчики повреждения и средства неразрушающего контроля позволяют решить данную проблему [45].

Можно выделить три основные группы средств наблюдения за процессами деградации, отличающиеся качеством получаемой информации [42]. К первой группе относятся средства наблюдения за полностью наблюдаемыми процессами, применяемые при осуществлении методов визуального контроля. Например, рост наблюдаемых трещин отслеживается с помощью пластинок с поперечно нанесенными проволочками, которые рвутся по мере увеличения длины трещины (пластины накладываются на растущие трещины). Ко второй группе относятся средства, отслеживающие не сам процесс деградации, а другой, доступный измерению и коррелирующий с исходным. Например, это может быть изменение омического сопротивления тензодатчиков, сигналов акустоэмиссии и др. К третьей группе относятся средства измерения внешних воздействий. В этом случае, как правило, процессы деградации ненаблюдаемы, поэтому получаемую информацию обрабатывают специальным образом для вычисления меры повреждения с применением какой-либо подходящей модели накопления повреждений.

В работах С. А. Тимашева [77, 78, 79, 80, 81, 82] обозначены основы теории оптимальной эксплуатации механических систем, накапливающих те или иные повреждения, с позиций изучения основных особенностей их функционирования и показано, что большинство задач оптимальной эксплуатации и технического обслуживания можно трактовать как задачи управления надежностью механических систем. Подобная трактовка задач позволила выделить новое направление исследований – оптимальное управление процессами деградации, рассмотрению методов и алгоритмов которого и посвящена настоящая работа.

Исследование показало, что сами модели управления надежностью выдвигают требования к качеству подставляемых в них моделей деградации, необходимых для поиска оптимальных эксплуатационных решений изучаемого оборудования. Современные модели обслуживания включают математические методы оптимального управления состоянием в сугубо вероятностной постановке, поэтому модели деградации должны быть достаточно богатыми в вероятностном аспекте. Чтобы решить данную проблему, необходимо создать общую теорию оптимального управления про-

цессами деградации, подходить к которой, по-видимому, следует с двух сторон. С одной стороны, процессы деградации должны строиться с дружелюбным интерфейсом к задачам оптимального управления, а с другой – модели управления должны иметь возможность простого и ясного инкорпирования параметров процессов деградации в свои алгоритмы. Коротко говоря, модели управления процессами и описания процессов деградации должны быть согласованы между собой. Последнее влечет за собой необходимость формирования не только новых моделей управления случайными процессами, но и новых моделей процессов деградации, в частности, усталостного накопления повреждений.

Прежде, чем будут изложены основные результаты исследования методов оптимального управления процессами деградации, остановимся на предыстории данного вопроса и проясним постановку рассматриваемых задач.

1.1. Управление надежностью элементов механических систем

В общем случае можно утверждать, что конечной целью всех расчетов надежности является обеспечение надежности элементов МС, управление процессами изменения их эксплуатационных свойств и оптимизация этого управления. Еще в 1966 г. Р. Хевилендом [88] ставились задачи управления старением изделий при эксплуатации. Предлагалось использовать такие методы, как выбор материалов, установка изоляции против потоков энергии, уменьшение нагрузки, ремонт изделий. К 1969 г. уже сложилось понятие управления надежностью [52], под которым понимались различные воздействия на систему, влияющие на характеристики надежности и приводящие к уменьшению вероятности и стоимости отказов. К настоящему времени сложилось два подхода к постановке задач управления надежностью систем.

Первый подход является логическим продолжением традиционных задач технического обслуживания и для него характерны следующие два способа управления надежностью [52]:

- уменьшение интенсивности отказов за счет выявления (путем измерения), устранения (путем ремонта и регулировок) предпосылок к отказам и профилактической замены элементов перед наступлением их старения или изнашивания;

- улучшение ремонтпригодности за счет уменьшения среднего времени восстановления при невозможности дальнейшего увеличения среднего времени безотказной работы.

Второй подход к постановке задач управления надежностью ориентирован преимущественно на механические системы, при управлении надежностью которых необходимо решать уже различные задачи механики и внедрять в алгоритмы обслуживания знания по нагрузкам и развитию различных повреждений элементов МС. Для обеспечения надежности и оптимального расходования ресурса машины или конструкции можно управлять [81, 82]:

- случайным процессом нагружения (динамическим или статическим), в частности, активным парированием колебаний;
- конфигурацией системы, изменением граничных условий, наложением или снятием связей, варьированием во времени жесткости упругих элементов или коэффициентов трения демпферов;
- восстановлением свойств системы по определенным правилам.

Последний способ управления в определенной степени объединяет эти два подхода и представляется наиболее интересным с точки зрения возможности вовлечения в традиционные задачи технического обслуживания знаний по механике разрушения и методов расчета времени и последствий отказа изделий. Благодаря такой постановке вопроса появляется возможность использовать одновременно как развитые алгоритмы оптимального технического обслуживания, так и современные стохастические методы расчета надежности, применяемые при расчетах динамики и прочности машин и оборудования.

В работах С. А. Тимашева дана общая классификация задач управления надежностью, предложен принцип выбора предупреждающего и критического отказа МС, в основе которого – выявление характерных точек на кривой эволюции состояния МС в пространстве состояний и оценка плотности распределения временного интервала между ними [78, 81, 82]. Предложены модели управления нагрузкой и оператором МС в классе двухуровневых политик, когда процесс нагружения или деградации может быть описан последовательностью независимых величин. Поставлена и решена задача управления вынужденными колебаниями МС с позиций продления за этот счет ее ресурса и рассмотрено влияние защиты на надежность МС. В последнее время основы теории оптимальной эксплуатации МС были

дополнены концепцией технического мониторинга МС [55, 77, 79], определяющей пути оптимизации эксплуатации за счет непрерывного либо периодического контроля состояния МС, прогнозирования ее дальнейшего поведения и решения комплекса вероятностных задач, что необходимо для корректного выбора способа дальнейшей эксплуатации МС.

Современные МС изобретаются и проектируются (по крайней мере должны) с тем или иным видом конструктивной защиты. Защита трактуется как средство управления системой, позволяющее своевременно предотвратить отказ. Под защитой понимаются как службы эксплуатации, так и различные предохранительные устройства. При этом во время функционирования МС всегда предполагается (иногда неявно) существование состояний МС, которые приводят к включению защиты [78]. В задачах управления надежностью под предупреждающим состоянием системы понимается некоторое состояние, при достижении которого подается сигнал о возможном нарушении функционирования системы в ближайшем будущем, например, о состоянии отказа, несущем небольшой ущерб. Исходя из этого определения, можно понимать под состоянием предупреждающего отказа отказ с небольшим ущербом, а под критическим отказом – отказ, ущерб от которого значителен и зачастую выражается не только в экономических показателях. Здесь используются определения предупреждающего и критического отказа как явлений, связанных именно с ущербом – стоимостью последствий отказа: аварийной ситуации, временем простоя, затратами на восстановление и т. п.

Приведем простые примеры того, что можно сделать в рамках решения рассматриваемой задачи. Например, можно наносить защитные покрытия для корродирующей системы, заваривать трещины, производить заточку инструмента, заменять смазку, заменять детали; если процесс деградации связан с механической нагрузкой, то сбросить ее часть или всю нагрузку. Иными словами, произвести некоторую процедуру восстановления состояния МС. Отметим, что своевременную остановку и замену элементов МС можно также трактовать как процедуру восстановления состояния системы в целом. Именно это соображение позволяет объединить задачи технического обслуживания и управления надежностью. Вместе с тем, становится ясно, что требуются новые подходы к работе в этом направлении, поскольку современные модели технического обслуживания не являются в достаточной мере полными для простой подстановки в них па-

раметрических описаний процессов деградации. Расширение существующих моделей оптимального технического обслуживания и построение новых моделей управления надежностью на основе понимания механизмов деградации изделий приводят к постановке задач оптимального управления процессами деградации.

Корректное решение подобных задач возможно лишь при наличии:

- описания стохастического процесса деградации (либо его измеримого аналога), позволяющего оценивать состояние элемента и прогнозировать его остаточный ресурс;
- подходящих стратегий и политик эксплуатации, учитывающих явление деградации свойств элемента;
- функционалов качества эксплуатации;
- способов отыскания правил оптимальной остановки или восстановления свойств элемента МС.

Как и в общих задачах оптимального управления системами в зависимости от каждой конкретной ситуации следует использовать один из двух подходов:

1. Программное управление процессами деградации, когда стратегии и политики управления основываются лишь на априорной информации о развитии процессов деградации.

2. Управление по состоянию, когда в процессе эксплуатации для выработки адекватных решений используется также апостериорная информация о развитии процесса деградации.

Естественно, эти два подхода достаточно условно разделяются в рассматриваемых ниже задачах, поскольку совмещение методов оптимального управления и процессов деградации элементов МС является нетривиальной проблемой и сделаны лишь первые попытки ее решить.

1.2. Модели деградации элементов механических систем

В общем случае можно выделить два подхода к описанию явления деградации: структурный и феноменологический [9]. Структурный подход основывается на механике и физике макро- и микроразрушения и является наиболее точным и теоретически обоснованным. Он позволяет описывать физическую сущность явления деградации с позиций причинно-следственных связей, но вместе с тем зачастую оказывается и чересчур громоздким

для практических расчетов реальных элементов МС. Поэтому параллельно с ним идет развитие феноменологического подхода, основывающегося на методах экспериментальной механики. Основное его преимущество состоит в том, что описание процессов деградации элементов МС можно осуществлять сразу на основе испытаний самих элементов или заменяющих их образцов, не прибегая к сложным физическим и механическим моделям. Рост количества экспериментальных исследований обуславливается также развитием вычислительной техники, возможностью быстрой обработки с ее помощью статистических данных, получаемых в ходе опытов и натуральных наблюдений.

В общем случае принято рассматривать явление накопления повреждений, возникающее в элементах механических систем в результате действия на них внешних нагрузок и других факторов, в качестве некоторого числового процесса $\mu(t)$, $0 \leq t \leq T$, монотонно изменяющего свое состояние от нуля до единицы. При этом процесс конструируется таким образом, чтобы момент достижения единицы совпадал с моментом отказа, а нулевому состоянию соответствовал неповрежденный образец. Начальное и конечное состояния образца могут отличаться от нуля и единицы и являться случайными величинами. Общим для всех процессов накопления повреждений является то, что поврежденный или разрушенный образец не может быть восстановлен до своего прежнего состояния, что представляется наиболее трудно разрешимой проблемой при использовании традиционных статистических методов оценки параметров моделей. Кроме того, некоторые из процессов накопления повреждений наблюдаемы, а некоторые – нет.

Ресурс практически всех элементов механических систем является случайной величиной, что объясняется случайным характером развития в них процессов деградации. Можно выделить следующие основные источники рассеяния ресурса элементов:

1. Даже идентичные образцы отличаются друг от друга изначально по своим свойствам накапливать повреждение.

2. Сам процесс накопления повреждений является случайным. Даже если бы мы могли восстановить поврежденный образец до его начального состояния и нагрузить идентичной историей нагружения, то ресурс элемента и его поведение оказались бы другими.

3. Истории нагружения и внешние факторы также являются случайными процессами.

4. Идентичные истории нагружения при стендовых испытаниях все равно имеют случайные флуктуации.

Учет указанных источников рассеяния возможен в той или иной форме лишь посредством использования случайных величин и процессов для описания деградирующих свойств элементов, что является, конечно, общепринятым. Однако, взглядевшись в существующие модели более внимательно, можно заметить, что не все модели обладают необходимыми свойствами для использования в задачах обслуживания механических систем. Прежде всего, должно быть указано то вероятностное пространство, на котором разворачиваются все последующие события. Во-вторых, необходимо четко представлять, какие физические или мысленные эксперименты лежат в основе вероятностного пространства. В-третьих, нормальной практикой является забывать о том, что математическое ожидание функции от случайной величины не равно функции от математического ожидания: $E\varphi(X) \neq \varphi(EX)$. Далее, если это вероятностное пространство построено, то все случайные величины, появляющиеся по желанию авторов какого-либо способа моделирования, должны быть обязательно в некоторой указанной стохастической зависимости (или независимости) друг от друга.

Можно выделить два подхода к введению вероятностных структур в описание процессов деградации:

1. Описание физического феномена с помощью либо детерминированных функций, либо дифференциальных уравнений и дальнейшей рандомизации их параметров. В этом случае эволюция состояния феномена описывается как функция времени, а значит, выборочные функции (реализации процесса) аппроксимируются некоторым определенным классом функций – решений этих уравнений, зависящих от случайных параметров.

2. Описание физического феномена с самого начала как вероятностной структуры с использованием законов изменения вероятностных распределений во времени, т. е. описание явления как случайного процесса. В частности, могут использоваться и стохастические дифференциальные уравнения.

В ряде работ в качестве моделей деградации предлагается использовать дифференциальные уравнения, на вход которых подаются случайные процессы, обычно гауссовского типа [9, 25, 75, 76, 104, 117]. Среди прочих наибольшее распространение получили марковские процессы деградации, в особенности с дискретным множеством состояний [9, 25, 28, 76, 138], поскольку при решении многих прикладных задач нет необходимости рас-

смаатривать процессы, непрерывные в пространстве состояний. При некотором приближении можно интересоваться не точным положением точки, а вероятностью, что точка находится в заданном интервале. Процессы марковского типа естественно использовать также в силу их простой вероятностной структуры, что дает возможность задавать их посредством аналитически обозримых характеристик [34, 46].

Еще одним распространенным способом описания процессов деградации являются стохастические дифференциальные уравнения, в частности, диффузионного типа, для которых условные переходные вероятности удовлетворяют уравнениям Фоккера – Планка – Колмогорова [9, 75, 117, 125]. Этот способ менее удобен с вычислительной точки зрения, так как приходится решать краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных.

Для различных процессов деградации требуются, вообще говоря, различные модели накопления повреждений. В то же время оказывается, что одинаковые математические модели могут с успехом использоваться для описания подобных физических явлений различной природы. Данная ситуация стала совершенно очевидной со времени появления монографии Дж. Богдановфа [5], который с успехом применил марковские модели в единой манере к различным процессам накопления повреждений.

В целом, современный уровень развития стохастических моделей деградации позволяет выбирать ту или иную модель, хотя и требует определенной адаптации в зависимости от специфики решаемой задачи управления. Этот выбор определяется как удобством и адекватностью описания явления деградации, так и возможностью ее использования для отыскания стратегий и политик эксплуатации.

1.3. Модели эксплуатации технических систем

Основная задача теории эксплуатации систем состоит в выработке специальных рекомендаций по организации их функционирования [66]. Эта идея нашла свое отражение в работах В. И. Бойко, И. В. Герцбаха, Х. Б. Кордонского и многих других [2, 6, 8, 17, 43, 51]. Следуя за В. В. Болотиным и С. М. Набойщиковым [7], определим программу эксплуатации как совокупность взаимосвязанных по месту, времени и содержанию работ, обеспечивающих эксплуатацию системы в заданном состоянии готовности, а также применение ее по назначению.

1.3.1. Стратегии и политики эксплуатации

Многие из программ оптимальной эксплуатации систем можно описать в терминах управляемых случайных процессов. В теории управляемых случайных процессов принято называть правила решения задач по управлению случайным процессом политикой управления, а последовательность таких политик – стратегией управления [50]. Поэтому в задачах оптимальной эксплуатации систем по аналогии также удобно использовать термины «стратегия эксплуатации» и «политика эксплуатации».

Информацию о техническом состоянии системы принято разделять на априорную, накопленную до начала эксплуатации и выбора правил управления, и апостериорную, накапливаемую в процессе эксплуатации к моменту принятия решения о дальнейшей эксплуатации [6]. Эти различия и обуславливают два основных способа проведения профилактических мероприятий: с помощью априорно выбранных правил или после предварительного измерения некоторых параметров системы непосредственно в процессе эксплуатации. Соответственно, существует и два упомянутых выше подхода к решению задач оптимальной эксплуатации: с помощью методов программного управления и с помощью методов управления с обратной связью. Очевидно, что использование апостериорной информации о состоянии системы и осуществление эксплуатации системы по состоянию более эффективно [8]. Опишем кратко основные подходы к решению подобных задач, сформировавшиеся к настоящему времени.

Если состояние техники характеризуется наработкой и исправностью (неисправностью) составляющих ее частей, то модели управления состоянием базируются на теории восстановления [8], а основная задача состоит в нахождении оптимальных периодов профилактики. Дальнейшее развитие этого направления связано с использованием аппарата случайных процессов и формированием моделей отказов на основе введения состояний системы типа отказа одного или нескольких элементов, состояний работоспособности и т. д. В этом случае задача эксплуатации сводится к определению глубины и периодов профилактики [15, 51] на основе априорной информации.

В случае более гибкой стратегии обслуживания, когда можно проводить профилактические мероприятия в зависимости от состояния системы, получили развитие методы оптимального управления случайными процес-

сами, в особенности полумарковские модели технического обслуживания [6, 8, 15, 17, 51]. Это объясняется тем, что полумарковские процессы при весьма общих предположениях относительно исходных характеристик надежности системы и ее элементов, правил проведения различных восстановительных мероприятий, характеристик проявления отказов, длительности восстановления и т. п. достаточно приемлемо описывают поведение технической системы как набора взаимосвязанных элементов [15].

Приведем типичный пример постановки и решения подобной задачи. Предполагается, что система может находиться в одном из n состояний. Состояние 0 – начальное состояние системы, а n^* – состояние отказа. В дискретные моменты времени $t = 0, 1, \dots$ система проверяется, после чего она либо заменяется новой, либо нет. Возможно также и неполное восстановление системы, в результате чего она оказывается в одном из промежуточных состояний. Правило замены представляет собой разбиение множества состояний на два подмножества: состояний, в котором производится замена, и состояний, в котором замена не производится. При этом предполагается, что процесс перехода из одного состояния в другое образует марковскую цепь. Оптимальные решения отыскиваются при минимизации средних удельных затрат на эксплуатацию. Для отыскания этих правил используются методы линейного и динамического программирования.

Следующий шаг в развитии теории оптимальной эксплуатации технических систем – углубление понятия состояния системы. В процессе эксплуатации происходит изменение механических свойств системы – ее деградация, которую можно отследить с помощью некоторого измеримого параметра. В зависимости от значений этого параметра принимается решение о проведении каких-либо профилактических мероприятий. При такой стратегии обслуживания изделие эксплуатируется до предотказового состояния. Для выявления предотказового состояния может использоваться принцип назначения предупреждающих допусков на диагностируемые параметры. Под предупреждающим допуском понимают совокупность значений параметров, заключенных между предельным и предотказовым состоянием. Выход параметра за предельный уровень означает отказ, а достижение предотказового уровня – необходимость профилактики или замены. В данном случае требуется определить оптимальный предупреждающий уровень, при достижении которого принимается решение о проведении профилактических работ [47, 55].

Характеризуя уровень работ по оптимальному техническому обслуживанию систем в целом, следует отметить, что большинство исследований посвящено либо определению периодичности и полноты проведения профилактики вообще без учета физических явлений, породивших деградацию системы, либо с использованием некоторого параметра, достаточно абстрактно связанного с процессом деградации. Поэтому можно утверждать, что в настоящее время одним из перспективных направлений исследований является разработка ориентированных методов оптимальной эксплуатации МС, учитывающих в своих алгоритмах в явном виде модели деградации системы.

1.3.2. Функционалы качества

В моделях оптимальной эксплуатации систем политики эксплуатации и случайные процессы, описывающие изменение состояния системы, связываются между собой с помощью функционалов качества эксплуатации. Наиболее часто используемые показатели – это коэффициент готовности, вероятность выполнения задания, коэффициент эффективности системы, математическое ожидание удельных затрат или удельной прибыли. С экономической точки зрения наиболее удобно использовать такие функционалы качества, как максимум прибыли или минимум затрат. Последний является наиболее удобным, поскольку не предполагает планирования будущих продаж, зависящих от рынка сбыта продукции, и определяет собственные минимальные издержки на эксплуатацию. Обозначим за $\{X_c(t)\}$ управляемый процесс деградации. Качество эксплуатации элемента такой

МС оценивается интенсивностью издержек $S(T) = \frac{1}{T} \int_0^T f(X_c(t)) dt$ на интер-

вале $[0, T]$, где $f(\bullet)$ – детерминированная неотрицательная функция, имеющая смысл затрат от пребывания процесса $\{X_c(t)\}$ в состоянии x ,

а $Y(T) = \int_0^T f(X_c(t)) dt$ – неубывающий случайный процесс, имеющий смысл

суммарных издержек за время эксплуатации T . В теории восстановления [38] функция $Y(T)$ называется процессом накопления. Данный подход к оценке качества эксплуатируемых систем распространен достаточно широко [8, 15, 65, 78].

Рассмотрим два возможных случая эксплуатации систем:

- эксплуатируемые в течение длительного времени с неоднократным восстановлением состояния элементов системы;
- системы однократного действия, когда восстановлению подвергается вся система или вообще прекращается ее эксплуатация.

В первом случае оптимизация заключается в поиске минимума стационарной интенсивности затрат по параметрам политики управления (величинам предупреждающего допуска, полноте и периодичности профилактики и т. д.):

$$\min \lim_{T \rightarrow \infty} S(T)$$

Эксплуатация элемента МС происходит таким образом, что моделирующий управляемый процесс $\{X_c(t)\}$ оказывается регенерирующим процессом с циклом регенерации θ_i , $i = 1, 2, \dots$. В этом случае последовательность времен θ_i образует рекуррентный процесс восстановления, так как куски $\{X_c(t)\}$ на каждом цикле регенерации эквивалентны и приращения $\Delta Y = Y(\theta_i) - Y(\theta_{i-1})$ образуют рекуррентный процесс восстановления. Тогда из эргодических теорем для процессов накопления [33, 38, 65, 69] следует:

$$\frac{Y(T)}{T} \rightarrow \frac{E\Delta Y}{E\theta}, \text{ при } T \rightarrow \infty.$$

И, значит, задача оптимизации сводится к минимизации функционала – отношения математических ожиданий:

$$\frac{E\Delta Y}{E\theta},$$

где

$$\Delta Y = \int_0^{\theta} f(X_c(t)) dt. \quad (1.3.1)$$

В числителе (1.3.1) стоит математическое ожидание суммарных затрат на эксплуатацию за один цикл эксплуатации в стационарном режиме, а в знаменателе – математическое ожидание длительности цикла регенерации, например, времени между соседними моментами подачи сигнала на восстановление системы.

Во втором случае, при эксплуатации систем однократного действия до момента остановки и снятия системы с эксплуатации, оптимизация заключается непосредственно в поиске минимума математического ожидания удельных затрат

$$E \left(\frac{\int_0^{\theta} f(X_c(t)) dt}{\theta} \right) \quad (1.3.2)$$

по параметрам политики управления, где θ – случайное время до аварийной или превентивной остановки. Оптимизация по функционалу (1.3.2) является более трудоемкой задачей, поскольку приходится искать минимум математического ожидания отношения двух зависимых случайных величин.

Большинство задач оптимизации систем по удельным затратам рассматривается в стационарном режиме при использовании функционала (1.3.1), когда подразумевается многократная замена элементов. Применение этого же функционала к системам однократного действия приводит к значительным ошибкам. В справочнике «Надежность и эффективность в технике» [55], вышедшем в 1990 г., подытожен опыт разработки систем эксплуатации за предыдущие 20 лет как отечественными, так и зарубежными исследователями. В качестве главенствующего показателя качества эксплуатации используется отношение математических ожиданий затрат и длительности цикла эксплуатации. Решение, предложенное для систем однократного действия, базируется на лемме Дуба для принятия последовательного решения об остановке эксплуатации для наблюдаемого процесса при оценке стоимости эксплуатации посредством функционала, аналогичного (1.3.2). Этот метод также широко известен для мартингалов и марковских процессов в общей теории оптимальных правил остановки [64, 89].

Функционалы (1.3.1–1.3.2) приведены в общей форме. Их конкретный вид зависит от рассматриваемой задачи. Ниже будут приведены те или иные формы, которые могут приобретать указанные функционалы.

1.4. Расчеты на сопротивление усталости

В работе рассматриваются различные модели деградации, используемые в задачах управления, но особое внимание уделено методам прогнози-

рования ресурса элементов МС по сопротивлению усталости. К настоящему времени возникла острая необходимость в осмыслении именно этого феномена с вероятностных позиций, причем таким образом, чтобы была возможность использовать модели накопления усталостных повреждений при решении задач оптимального управления подобными процессами. Умение прогнозировать ресурс вероятностными методами имеет огромное значение при отыскании стратегий управления элементами МС, отказывающихся вследствие накопления усталостных повреждений.

Использование стохастических моделей накопления усталостных повреждений применительно к различным МС находится на разных стадиях активности. Для авиационной и космической техники вероятностные методы расчета усталостной долговечности, в основе которых зачастую лежат скорректированная линейная гипотеза суммирования повреждений и рандомизация показателей нагруженности и сопротивления усталости материала деталей, получили широкое распространение [7, 18]. Для более простых машин и конструкций наиболее массового использования, которые, тем не менее, должны обладать необходимыми потребительскими свойствами (в частности, с точки зрения надежности), делать такие заявления пока рановато.

Можно считать, что главной целью решения задач прогнозирования ресурса машин является построение функции распределения ресурса, что особенно важно при прогнозировании остаточного ресурса и отыскании оптимальных правил эксплуатации системы по состоянию. Приведем исходные предпосылки и необходимые результаты по расчетам сопротивления усталости.

Основные характеристики сопротивления усталости получают в виде кривых усталости, которые отображают зависимость циклической долговечности N при регулярном нагружении от амплитуд циклов деформации ε (малоцикловая усталость) или напряжений s (многоцикловая усталость). В дальнейшем, если это не будет оговорено особо, под нагружением или историей нагружения h будет пониматься изменение во времени амплитуды циклов напряжения s в области многоциклового усталости.

В детерминированном случае кривая усталости задается как зависимость значений циклической долговечности, измеряемой в числе циклов нагружения

$$N(s) = N(s, s_R, m, N_0, \dots),$$

зависящей от амплитуды цикла нагружения s и набора параметров: s_R – предела выносливости при коэффициенте асимметрии цикла R , показателя степени наклона кривой в логарифмических координатах m , абсциссы точки перелома кривой усталости N_0 и т. д. Кривая усталости $N(s)$ строится либо по средним значениям выборок долговечности при каждом значении s , либо по квантильным точкам выборок $N_p(s)$ заданной вероятности p , выбираемой из каких-либо соображений безопасности.

При расчетах на усталостную долговечность наибольшее распространение получили степенные кривые усталости

$$N(s) = \begin{cases} N_0 (s_R / s)^m, & s > s_R \\ \infty, & s \leq s_R \end{cases}, \quad (1.4.1)$$

имеющие в двойных логарифмических координатах вид

$$\log N(s) = \begin{cases} \log N_0 + m(\log s_R - \log s), & s > s_R \\ \infty, & s \leq s_R \end{cases}. \quad (1.4.2)$$

При такой заданности кривой усталости считается, что при амплитудах нагружения меньших предела выносливости s_R разрушения не происходит даже за бесконечное число циклов нагружения. Уравнения (1.4.1–1.4.2) описывают квантильные, или средние, значения долговечности, полученные при стандартных циклических испытаниях. Для определенности будем в дальнейшем считать, что эти уравнения задают медианные значения долговечностей. Параметр m определяется в двойных логарифмических координатах как $m = \frac{\log N_1 - \log N_2}{\log s_2 - \log s_1}$.

В полулогарифмических координатах аналогичная кривая усталости записывается как

$$\log N = \log N_0 + (s_R - s) / m, \quad (1.4.3)$$

где m определяется из уравнения

$$m^{-1} = \frac{s_2 - s_1}{\log N_1 - \log N_2}.$$

Дополнительно отметим, что существуют десятки эмпирических зависимостей для описания кривых усталости, но, как правило, расчет конкретного элемента производится либо по стандартизированным кривым

усталости (1.4.1–1.4.3), либо на основе индивидуальных исследований усталостных свойств и с использованием собственных зависимостей для кривых усталости.

Параметры s_R , m и N_0 для различных марок сталей и сплавов можно найти по справочной литературе. Кроме того, используются регрессионные зависимости, связывающие эти параметры усталостной прочности с параметрами статической прочности s_B , типа уравнения $s_{-1} = 0,29s_B + 79$. Подобные зависимости существуют и для других параметров усталости. Вообще, в стандартных нормах расчета [54] существуют кривые усталости и соответствующие им аналитические формы, определяющие нормативные значения допускаемых амплитуд нагружения по целым группам близких по механическим свойствам материалов, включая параметры статической и усталостной прочности, коэффициенты запаса, и позволяющие производить достаточно грубые оценки усталостной долговечности элементов МС лишь по этим зависимостям.

Параметры кривых усталости определяются в большинстве случаев для образцов материала, а не для образцов элементов МС. Поэтому для кривых усталости элементов МС должны быть найдены коэффициенты, поправляющие все соответствующие параметры кривых усталости образцов материала, – типа коэффициентов концентрации усталостных повреждений.

Еще одна важная закономерность в поведении материалов, обнаруживаемая в испытаниях на усталость, заключается в том, что при увеличении среднего уровня действующих напряжений s_m для сохранения той же долговечности приходится уменьшать значения амплитуд напряжений. Для характеристики сопротивляемости материала действию переменных напряжений в зависимости от характеристики циклов строится так называемая диаграмма предельных напряжений. Методы построения такой диаграммы по экспериментальным данным описаны практически во всех справочниках. При отсутствии экспериментальных данных влияние отличного от нуля среднего значения цикла нагружения можно оценить с помощью одного из нескольких известных эмпирических соотношений, аппроксимирующих график зависимости амплитуды цикла s от среднего напряжения s_m , например, формулы Герберга, Гудмена, Когаева-Серенсена и др. Приведем выражения для определения эквивалентных напряжений,

при которых несимметричные циклы нагружения приводятся к эквивалентным симметричным циклам [25, 39]:

$$s_e = \begin{cases} s + \varphi_1 s_m \\ s - \varphi_2 s_m \end{cases},$$

где $\varphi_i, i = 1, 2$ – тангенсы углов наклона на диаграмме предельных амплитуд.

Кроме того, результаты испытаний могут быть представлены функциями распределения долговечностей $F(y|s) = P\{N < y|s\}$ при каждом значении s в виде плотностей распределения $f(y)$. Возможно также построение функций распределения пределов ограниченной выносливости $f(x)$ и ряда других параметров усталостной прочности. Более подробно функции распределения характеристик сопротивления усталости будут рассмотрены нами далее.

1.4.1. Оценка долговечности на основе анализа локальных напряжений и деформаций

По мнению Дж. Коллинза, наиболее перспективный подход к оценке возможности возникновения усталостных трещин связан с исследованием локального напряженно-деформированного состояния (*local stress-strain analysis*). Основная предпосылка в данном случае заключается в том, что локальное усталостное поведение материала в опасной точке, т. е. в месте образования трещины, аналогично поведению небольшого гладкого образца при воздействии на него таких же циклических деформаций и напряжений [26, 39]. Поведение материала в опасной области в условиях циклически изменяющегося напряженно-деформированного состояния можно изучить, исследуя в лабораторных условиях гладкий образец. Таким образом, обладая информацией по усталостным свойствам материала, для оценки сопротивления усталости натурной конструкции необходимо располагать методами определения характеристик напряженно-деформированного состояния.

Отметим, что локальные напряжения S и деформации ε в зоне концентрации напряжений связаны между собой и с номинальным напряжением s сложными нелинейными зависимостями вследствие возможного развития в этой области пластических деформаций. Номинальное напряжение s получают из приложенной нагрузки путем простого деления ее на

площадь поперечного сечения в случае продольного растяжения или сжатия либо с помощью формул упругого изгиба, либо путем совместного применения этих операций или аналогичных вычислений для других видов нагружения. Во всех случаях номинальное напряжение связано с приложенной нагрузкой постоянным коэффициентом пропорциональности и, следовательно, принципиально ничем не отличается от приложенной нагрузки. Расчет локального напряжения по формулам теории упругости даст значение $K_t s$, где K_t – коэффициент концентрации упругих напряжений, также связанное с приложенной нагрузкой постоянным коэффициентом пропорциональности. Пластическая же деформация у выреза приводит к тому, что фактическое локальное напряжение связано с s сложной нелинейной зависимостью. Если величина $K_t s$ в какие-то моменты времени превосходит предел текучести материала, то простая формула $S = K_t s$ становится неверной и требуется более сложный расчет локальных напряжений и деформаций у выреза. Собственно анализ локальных деформаций и напряжений был предложен в первую очередь для расчетов в области малоцикло-вой усталости. В данном случае основной сложностью в определении усталостной долговечности является учет не только влияния концентрации напряжений, но и размеров изучаемого элемента конструкции, так как известно, что увеличение размеров элемента и концентрация напряжений снижают его предел усталости.

При подсчете локальных напряжений и деформаций по заданным внешним нагрузкам и геометрии при известных свойствах материала при циклических воздействиях и коэффициенте концентрации усталостных напряжений часто используют правило Нойбера, согласно которому в процессе пластического деформирования среднее геометрическое значение коэффициентов концентрации напряжения и деформации остается равным K_t :

$$K_t = (K_\varepsilon K_s)^{1/2}, \quad (1.4.4)$$

где $K_\varepsilon = \varepsilon / e$ – коэффициент концентрации локальной деформации (ε – локальная деформация; e – номинальная деформация);

$K_s = S / s$ – коэффициент концентрации локального напряжения.

Ключевой вопрос оценки истории локальных напряжений и деформаций связан с моделированием соотношений между напряжениями и деформацией материала в случае возникновения пластических деформаций в зоне концентрации напряжений, приводящих к малоцикло-вой усталости

элементов конструкций. Эти вопросы достаточно подробно рассматриваются Н. Е. Даулингом [26], который делает вывод, что данный подход, основанный на изучении локального поведения материала, разработан до высокой степени точности и универсальности и обладает необходимой простотой при использовании.

Применительно к усталостному нагружению соотношение (1.4.4) было модифицировано путем преобразования к виду [142]

$$K_f(\Delta s \Delta e)^{1/2} = (\Delta S \Delta \epsilon)^{1/2},$$

где K_f – коэффициент концентрации усталостных напряжений;

Δs – размах номинального напряжения;

Δe – размах номинальной деформации;

ΔS – размах локального напряжения;

$\Delta \epsilon$ – размах локальной деформации.

Если нагрузка достаточно мала и поведение материала во всем элементе номинально упруго, то $\Delta s / \Delta e = E$ (модулю Юнга). Тогда последнее выражение принимает вид

$$K_f(\Delta s)^2 = \Delta S \Delta \epsilon.$$

В противоположность теоретическому коэффициенту концентрации напряжений K_t коэффициент концентрации усталостных напряжений K_f зависит от свойств материала, а не только от геометрических параметров и вида нагружения. Для учета влияния свойств материала вводится показатель чувствительности к надрезам q , характеризующий соотношение между действительным влиянием надреза на усталостную прочность материала и влиянием, предсказываемым лишь на основе теории упругости:

$$K_f = q(K_t - 1) + 1.$$

Входящий сюда теоретический коэффициент концентрации упругих напряжений при заданных геометрических характеристиках надреза и условиях нагружения можно определить либо по справочной литературе, либо с помощью конечно-элементного анализа. Определить коэффициент чувствительности к надрезам q несколько сложнее: получены лишь некоторые соотношения для его вычисления по небольшому числу видов образцов и материалов. Чтобы все-таки воспользоваться данным подходом – анализом лишь локального напряженно-деформированного состояния, всегда можно пренебречь коэффициентом q и вести расчеты запаса прочности (посколь-

ку $K_f < K_t$) по локальным напряжениям, полученным вычислительными или экспериментальными способами.

При расчетах сварных соединений преимущественное распространение получили также методы расчета на основе анализа локально-деформированного состояния. Общий подход к определению концентрации напряжений для сварных узлов остается таким же, как и при определении конструктивных концентраторов напряжений типа выемок, надрезов и т. д. Анализ локального напряженно-деформированного состояния позволяет обозначить влияние класса прочности стали, качества сварного соединения и других факторов на характеристики сопротивления усталости сварных узлов конструкций, конструктивно-технологическое решение сварного соединения, величины остаточных напряжений.

Отметим также широкое распространение статистической теории подобия усталостного разрушения, критикующей использование коэффициентов концентрации усталостных напряжений как характеристики с ограниченной достоверностью и не рекомендующей проводить с ними расчеты [7, 20, 36, 57, 69].

Параллельно успешно продолжались работы по совершенствованию методов расчета, основанных на анализе локального напряженно-деформированного состояния без использования статистической теории подобия с проверкой расчетов на натурных конструкциях, например, сварных узлов [91, 133], стрелы экскаватора [110] и многих других. Это можно объяснить большей простотой и ясностью анализа локального напряженно-деформированного состояния.

В англоязычной литературе теория статистического подобия не получила распространения, по-видимому, вследствие своей громоздкости и неоправданности некоторых исходных постулатов – использования распределения Вейбулла для зависимых элементов; предположений о разрушении по слабейшему звену без учета перераспределений напряжений; необоснованной замены распределения Вейбулла на нормальное и ряда других. Несмотря на эти замечания, при отработке статистической теории подобия было проведено большое количество экспериментов, позволивших обозначить практические рекомендации по ряду деталей и элементов конструкций, что, естественно, может быть и должно быть использовано при расчетах на долговечность совпадающих конфигураций и материалов конструкций. Своеобразное отражение эта посылка получила в ряде справоч-

ников, где в виде таблиц и диаграмм представлен опыт проектирования и испытаний на усталость конкретных подъемно-транспортных и металлургических машин, в том числе и с использованием статистической теории подобия усталостного разрушения [21, 74].

Для расчета на усталость сварных конструкций есть возможность использовать методические указания РД 50-694-90 [54], где методы оценки влияния всевозможных факторов на характеристики сопротивления усталости сварных соединений изложены достаточно полно и последовательно. Вместе с тем, нельзя признать представленные там методы расчета чисто вероятностными, поскольку они опираются на квантильный подход к определению долговечности. При этом решение задачи прогнозирования ресурса становится весьма затруднительным.

В целом можно считать, что расчет усталостной долговечности следует проводить на основе анализа локальной нагруженности и исследования напряженно-деформированного состояния, учитывая в явном виде концентрацию напряжений. Эффективную концентрацию напряжений возможно учесть с помощью соответствующих коэффициентов чувствительности материалов к концентраторам напряжений либо закруглением в безопасную сторону, пренебрегая ими. Основным вариантом расчета на усталостную долговечность элемента МС заключается в исследовании локальных историй нагружения, без изменения вида кривых усталости, полученных предварительно по образцам этого же материала. Дополнительное удобство данного подхода заключается в том, что можно достаточно легко перейти на расчет малоциклового усталости в случае появления больших локальных напряжений, близких к пределу текучести, и воспользоваться зависимостями типа уравнения Мэнсона.

1.4.2. Влияние сложного напряженного состояния на усталостную долговечность

Применительно к ситуации, когда компоненты напряженного состояния в расчетной точке со временем изменяются и представляют случайные процессы, можно выделить три основных подхода к учету влияния сложного напряженного состояния на усталостную долговечность.

1. Аналогичный стандартным методикам, при которых расчеты статической прочности элементов конструкций при сложном напряженном состоянии сводятся к определению расчетного напряжения по заданным

постоянным значениям компонент напряженного состояния в точке. При этом используется та или иная теория прочности и данное напряжение сопоставляется с опасным для конструкции. Использование статических теорий прочности обоснованно [85]. Во-первых, соотношение пределов выносливости при растяжении-сжатии и кручении изменяется для разных классов материалов примерно в том же интервале, что и соотношение между пределами текучести (или пределами прочности) при тех же способах нагружения, которое прогнозируется в классических теориях прочности. Во-вторых, процесс усталости связан с возникновением и развитием локальных микропластических деформаций, а в классических теориях пластичности как раз и прогнозируются условия перехода материала из состояния упругости в пластическое состояние.

При расчете элементов конструкций, находящихся в условиях действия многоосного напряженного состояния, допустимо использовать следующее фундаментальное предположение.

Разрушение в условиях действия циклического многоосного напряженного состояния происходит в том случае, когда размах (т. е. разность между наибольшим и наименьшим значениями) некоторой механической характеристики достигает критической величины, т. е. такой, при которой происходит разрушение в условиях одноосного состояния [39]. В частном случае используется эквивалентное напряжение s_e .

Дополнительно возникают две задачи: 1) определение расчетного напряжения, предопределяющего накопление в материале конструкции усталостных повреждений; 2) определение расположения площадки с максимальными значениями накопленного повреждения [25].

В случае синхронного и синфазного изменения всех случайных компонент тензора напряжений расположение опасной площадки можно считать известным. Оно совпадает с расположением площадки, в которой расчетное напряжение достигает максимального значения. Остается лишь выбрать расчетное напряжение, которое является в этом случае одномерной случайной функцией времени, и применить соответствующие формулы расчета на долговечность, как и в одномерном случае. В соответствии с первой теорией прочности, которая предполагает ответственными за разрушение максимальные растягивающие напряжения, можно использовать

$$s_e = s_1.$$

Вторая теория прочности, которая предполагает ответственными за разрушение максимальные относительные деформации, для определения эквивалентного напряжения предлагает выражение

$$s_e = s_1 - \mu(s_2 + s_3),$$

где μ – коэффициент поперечной деформации;

$s_i, i = 1, 2, 3$ – главные компоненты тензора напряжений.

Согласно этой схеме, на основании принятой теории предельных состояний (теории прочности) получают функцию приведения сложного напряженного состояния к эквивалентному линейному напряженному состоянию, характеризуемому эквивалентным напряжением s_e :

$$f(s_1, s_2, s_3, m_i) = s_e,$$

где m_i – некоторые параметры материала.

В тех случаях, когда известно, что изменение действующих нагрузок не совпадает по фазе, имеется возможность выбора: провести исследование с учетом разницы фаз или произвести расчеты из предположения совпадения фаз, принимая во внимание, что совершаемая при этом ошибка идет в запас прочности. В случае, если принимается решение производить расчет при не-синхронном и несинфазном изменении компонент тензора напряжений, различающихся по интенсивности воздействий (по дисперсиям) и частотному составу, схема аналогична описанной выше, но эквивалентное расчетное напряжение оказывается функционально (нелинейно) связано с несколькими случайными процессами. Вычисление вероятностных характеристик расчетного уже случайного процесса нагружения производится по заданным вероятностным характеристикам исходных процессов [25].

2. В развитие предложенной выше схемы сведения к одномерному варианту вводится понятие тензора повреждений [58], связанного с тензором напряжений и временем. Для полной аналогии тензор повреждений разбивается на девиатор с компонентами π_{ij} и шаровой тензор с компонентами π_0 . Мера повреждений выражается в форме некоторого инварианта тензора повреждений.

3. При вероятностном подходе [73, 85] считают известными три функции распределения $F(s_i)$ главных напряжений и три функции распределения $F(s_{Ri})$ пределов выносливости в трех главных направлениях. По функциям $F(s_i)$ и $F(s_{Ri})$ вычисляют вероятности усталостного разрушения $P\{A_i\}$ в главных направлениях (A_i интерпретируют как событие появления трещины усталости определенных размеров при действии напряжения s_i).

Затем находят функцию объединения $\Phi[P\{A_1\}, P\{A_2\}, P\{A_3\}] = P_e = P_c$ частных вероятностей разрушения $P\{A_i\}$ в эквивалентную вероятность разрушения P_e – такую, что $P_e = P_c$, где P_c – вероятность разрушения при соответствующем сложном напряженном состоянии.

Исходя из вышеизложенного, можно сделать следующие выводы. Поскольку расчет элементов конструкций следует производить по предельным состояниям и учитывать все многообразие факторов, влияющих на усталостную долговечность, и прежде всего, нерегулярность нагружения и концентрацию напряжений, то несмотря на перспективность второго и третьего подходов их использование пока затруднено, так как для большинства конструкций и материалов отсутствуют необходимая информация и модели по накоплению повреждений с использованием понятий тензора повреждений; отсутствует и статистическая информация, требующаяся для определения функций распределения пределов выносливости. Отсюда – очень большие сложности в доведении вероятностного подхода до моделей накопления повреждений.

Поэтому при построении развитого алгоритма расчета усталостной долговечности, который можно было бы использовать для большого числа разнообразных конструкций и конструкционных материалов, в дальнейшем будем рассматривать традиционный подход к определению эквивалентного напряжения по той или иной теории прочности и одномерные задачи прогнозирования накопления повреждений в элементе конструкции. В качестве основного источника соответствующих формул, определяющих s_e для различных материалов и случаев нагружения, можно взять справочник «Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность» [36].

1.4.3. Модели накопления усталостных повреждений

Центральное место в расчетах усталостной долговечности элементов МС занимают модели накопления усталостных повреждений, определяющие требования к исходной информации о свойствах материала, нагруженности и точность прогноза долговечности.

Наиболее теоретически разработанным методом описания законов накопления повреждений и прогнозирования ресурса является метод пространства состояний, подразумевающий использование марковских и аддитивных процессов изменения состояния [3, 4, 9, 16, 25, 32, 44].

Практически все способы описания законов накопления повреждений могут быть использованы в качестве математических моделей для определения функций распределения долговечности элементов конструкций. Но, об-

ладая в целом существенными теоретическими достижениями в плане осознания механизмов накопления усталостных повреждений, они не обладают четкой связью с параметрами, характеризующими усталость материала и конструкций. В этом случае возникает непростая задача идентификации параметров случайных процессов на фоне весьма ограниченного числа экспериментальных данных. Поэтому распространение получили более простые методы, основанные на правиле линейного суммирования повреждений.

По-видимому, решение проблемы создания качественных и одновременно простых методов описания стохастических свойств материалов и нагруженности в настоящее время состоит в расширении правила линейного суммирования повреждений до стохастических моделей [100, 135, 141]. Использование наработанных методов расчета и данных об усталостной прочности материалов позволит опереться на весь предыдущий опыт проектирования [20, 53, 54].

При использовании правила линейного суммирования повреждений предполагается, что накопленное повреждение, определяемое как

$$\mu = \sum n_i / N(s_i), \quad (1.4.5)$$

при достижении предельного состояния элемента конструкции становится равным 1 или некоторому числу a в соответствии с скорректированной линейной гипотезой. Здесь приняты следующие обозначения: n_i – общее число циклов нагружения с амплитудой s_i , встретившихся в истории нагружения h , $N(s_i)$ – число циклов нагружения до отказа, определяемое по кривой усталости при постоянной амплитуде нагружения s_i .

С целью придания (1.4.5) стохастического смысла ряд авторов [9, 25] предлагают ввести некоторый случайный параметр прочности r , ответственный за разброс усталостных свойств материала, т. е. представить $N(s_i)$ как функцию от r : $N(s_i | r)$ – таким образом, чтобы математическое ожидание от (1.4.5) стало равным 1:

$$E\left(\sum n_i / N(s_i | r)\right) = 1. \quad (1.4.6)$$

Но этот шаг, в сущности, замена требования

$$\sum n_i / EN(s_i | r) = 1 \quad (1.4.7)$$

на требование

$$\sum n_i / E[N(s_i | r)]^{-1} = 1. \quad (1.4.8)$$

Математическое ожидание случайного времени до отказа $E[N(s_i | r)]$ при постоянной амплитуде нагружения имеет вполне ясный физический смысл, и требование равенства 1 в условии (1.4.7) очевидно (это описание общепринятой детерминированной гипотезы правила Пальмгрена – Майнера). Трактовка же математического ожидания обратной величины к ресурсу в (1.4.8) не столь проста. Условие (1.4.6) или (1.4.8) означает, что в среднем мера накопленного повреждения к моменту отказа должна равняться 1. Этот подход в принципе может оказаться пригодным для задач проектирования, когда необходимо спрогнозировать отказы целого парка машин или конструкций, но не для задач индивидуального прогнозирования ресурса, поскольку неясно условие отказа индивидуального образца. Тем более что в конечном счете все опять сводится к нахождению математических ожиданий, а не функций распределения ресурса.

В ряде работ [7, 21, 25] описывается рандомизация предела выносливости с помощью метода Монте-Карло с последующим сглаживанием выборочных функций распределения. Эти и другие попытки рандомизации правила линейного суммирования повреждений нельзя признать достаточно удачными. К основным недостаткам можно отнести:

- непоследовательное использование вероятностных методов и некорректную работу со случайными величинами; как следствие – несогласованность исходной информации о статистических свойствах материала и нагружения с получаемыми функциями распределения;
- использование искусственных методов, слабо учитывающих физическую сущность явления усталости (таких, как метод Монте-Карло);
- отсутствие реальной связи с экспериментальными исследованиями.

Наилучший выход из этого положения, по мнению автора, состоит в расширении правила линейного суммирования повреждений (1.4.5) до линейной стохастической модели. Намеченные некоторыми авторами [9, 25, 44, 62, 63, 67, 68] подходы к решению данной задачи состоят в рандомизации кривых усталости по некоторым параметрам и введении понятия индивидуальных кривых усталости. В этом случае формальная запись суммирования повреждений в (1.4.5) остается, но благодаря новому стохастическому содержанию появляется возможность производить все вычисления чисто вероятностными методами вплоть до получения функций распределения ресурса с использованием равенства и сходимости случай-

ных величин почти всюду, условных математических ожиданий и других вероятностных понятий.

Рассмотрим более подробно основные постулаты детерминированного линейного правила суммирования повреждения, на основе которого будет производиться решение ряда задач в данной работе.

В таблице приведены основные детерминированные зависимости, связывающие кривые усталости, закон накопления повреждений и режим нагружения с величиной ресурса (в том числе остаточного) исследуемого элемента МС. Дадим некоторые пояснения.

В реальных условиях эксплуатации регулярное нагружение встречается крайне редко. Поэтому для расчетов на усталостную долговечность при нерегулярном нагружении используется то или иное правило накопления повреждений в испытуемом образце. Наибольшее распространение получило правило Пальмгрена – Майнера, основные положения которого формулируются следующим образом:

1) каждому выделенному циклу нагружения с амплитудой s ставится в соответствие единичное повреждение

$$\mu_u = 1/N(s), \quad (1.4.9)$$

где $N(s)$ – некоторое квантильное или среднее значение долговечности, определенное по кривой усталости;

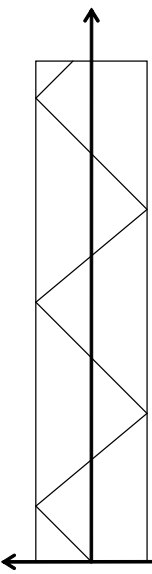
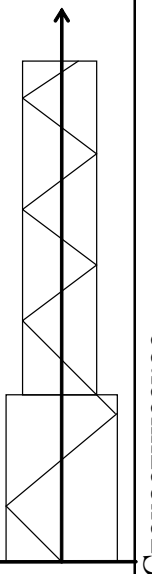
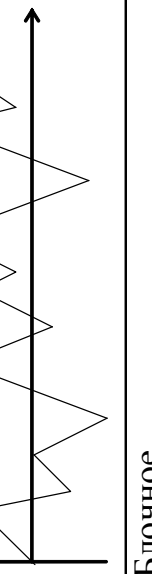
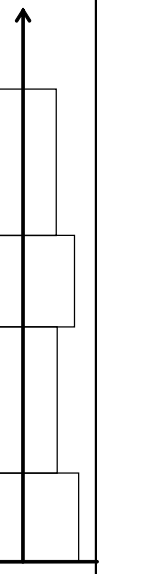
2) суммирование повреждений производится вне зависимости от порядка приложения циклов к образцу, что позволяет группировать одинаковые циклы в истории нагружения h по амплитуде и представлять накопленное повреждение в виде алгебраической суммы или интеграла (см. таблицу);

3) отказ образца происходит от воздействия некоторой истории нагружения h при достижении повреждением μ значения 1:

$$\mu\{h\} = 1. \quad (1.4.10)$$

Наиболее характерные истории нагружения, правила вычисления единичного и накопленного повреждения приведены в сводной таблице, где указаны основные формулы, используемые при расчетах на усталость для случая детерминированных зависимостей (1.4.9–1.4.10).

Основные детерминированные зависимости
для расчета накопленного повреждения и значений ресурса

История нагружения (нагружение)	Единичное повреждение	Накопленное повреждение	Ресурс	Остаточный ресурс
Регулярное 	$\mu_u = \frac{1}{N(s)}$	$\mu = n\mu_u = \frac{n}{N(s)}$	$N = \frac{1}{\mu_u}$	$N_{res} = N(s) - n$
Различных уровней 	—	$\mu = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{n_i}{N(s_i)}$	—	$N_{res} = (1 - \mu)N(s_j) - n$
Стохастическое 	$\mu_u = \int_0^j \frac{f(s)ds}{N(s)}$	$\mu = n\mu_u$	$N = \frac{1}{\mu_u}$	$N_{res} = N - n$
Блочное 	$\mu_b = \sum_{i=1}^j \frac{n_i}{N(s_i)}$	$\mu = n_b\mu_b$	$N_b = \frac{1}{\mu_b}$	$N_{res} = N_b - n_b$

По известной величине единичного повреждения, понимаемого как доля израсходованного ресурса за один цикл нагружения от данного режима нагружения, ресурс определяется как обратная величина к единичному повреждению.

В случае стохастического процесса нагружения вводится единичное повреждение по аналогии с (1.4.9) посредством интегральной формулы (см. таблицу), с помощью которой можно вычислить ресурс уже как некоторую величину приведенных циклов нагружения, имеющих случайную амплитуду, распределенную по некоторому закону $f(s)$. При блочном нагружении единичное повреждение определяется как накопленное повреждение за один блок нагружения, а ресурс исчисляется в количестве таких блоков нагружения (см. таблицу).

Остаточный ресурс определяется как произведение неизрасходованного повреждения $(1 - \mu)$ на прогнозируемый ресурс N или как разность между прогнозируемым ресурсом N и числом циклов n , прошедших с начала нагружения (см. таблицу).

Более подробное изложение детерминированных расчетов на основе правила Пальмгрена – Майнера можно найти в литературе по проблеме усталостной долговечности [3, 4 и др.].

1.4.4. Функции распределения характеристик сопротивления усталости

В настоящее время для оценки влияния конструктивных, эксплуатационных и технологических факторов на усталостную долговечность, а также для статистической обработки результатов усталостных испытаний используются, в основном, три вида функций распределения усталостных свойств [21, 36, 53, 54]. Обозначим некоторое усталостное свойство с помощью некоторой случайной величины X , подразумевая под ней долговечность, предел выносливости, параметр наклона и др.

1. Распределение Вейбулла – Гнеденко:

$$P\{X < x\} = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x - x_0}{c}\right)^b\right], \quad (1.4.11)$$

где x_0 – нижняя граница значений величины x , т. е. $P\{X \leq x_0\} = 0$.

В случае с долговечностью параметр x_0 называется порогом чувствительности по циклам; c – параметр масштаба, равный значению $(x - x_0)$ при $P = 0,632$, и b – параметр наклона, характеризующий степень рассеивания параметра x .

2. Нормальное распределение:

$$P\{X < x\} = \Phi\left(\frac{x - m}{s}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(x - m)^2}{2s^2}\right] dx, \quad (1.4.12)$$

где m – математическое ожидание;

s – стандартное отклонение случайной величины X ;

$\Phi(\bullet)$ – функция Лапласа.

3. Логнормальное распределение:

$$P\{X < x\} = \Phi\left(\frac{\log x - m_l}{s_l}\right), \quad (1.4.13)$$

где m_l и s_l – параметры распределения (подробнее о них говорится в гл. 4).

Распределение Вейбулла имеет случайная величина, представляющая собой минимум из большого числа одинаково распределенных независимых случайных величин [44, 53]. Модели, использующие это распределение, отражают неоднородность свойств самого объекта и не отражают случайного разброса свойств между объектами.

К нормальному распределению, согласно центральной предельной теореме, стремится распределение случайной величины, представляющее собой сумму большого числа слабо зависимых случайных величин. Применительно к характеристикам сопротивления усталости можно ожидать нормальное распределение, если отклонение от математического ожидания можно представить в виде суммы элементарных отклонений, каждое из которых вызвано случайным изменением какого-либо фактора от одного объекта к другому. Например, применительно к усталостной долговечности в качестве таких факторов выступают содержание различных химических элементов, разнотекстурность, шероховатость поверхности и т. д.

Характеристики сопротивления усталости имеют логнормальное распределение, если логарифмы этих характеристик имеют нормальное распределение. Данная модель предполагает, что определяющее значение в рассеянии характеристик принадлежит различиям в свойствах объектов. Другая модель, обосновывающая применение логнормального распределе-

ния, связана с процессом накопления усталостных повреждений или пластической деформации. При этом предполагается, что скорость накопления убывает в процессе испытаний, а различие в наработке до критического состояния связано как со случайными различиями между объектами, так и со случайностью процесса накоплений повреждений в каждом объекте.

Кроме перечисленных выше распределений для описания рассеяния долговечности распространены также следующие их типы: логнормальное с порогом, Дружинина, Бастенэра, Бернштейна, диффузионное, Бирнбаума – Сандерса и др. Однако в силу того, что в методической литературе предлагается использовать три приведенных выше распределения (1.4.11–1.4.13) как наиболее отработанные в вопросах, связанных с долговечностью, и наиболее адекватно отражающие экспериментальные исследования, в дальнейшем нами будут рассматриваться, в основном, именно они.

1.4.5. Анализ процессов нагружения

Необходимой частью решения задачи прогнозирования ресурса элементов механических систем является оценка их нагруженности.

Воздействие стохастических процессов нагружения на элементы конструкций по повреждающему эффекту отличается от воздействия процессов с регулярной структурой (с постоянными амплитудами циклов колебаний нагрузки). В то же время большая часть имеющейся информации об усталостных свойствах материалов и элементов конструкций получена при регулярных режимах нагружения. При случайных историях нагружения, имеющих сложную структуру, цикл нагружения однозначно не определяется, поэтому использование напрямую в расчетах на долговечность информации о характеристиках сопротивления усталости при регулярном нагружении становится затруднительным.

Можно выделить два основных подхода к учету влияния на усталостную долговечность процессов нагружения со сложной структурой:

1. Для проведения расчетов необходимо привести процессы со сложной структурой к эквивалентным по повреждающему действию процессам с простой структурой. Полной эквивалентности при этом достичь не удастся [25], и рекомендуемые методы приведения в значительной степени основаны на опыте их практического использования. В настоящее время применяется более десятка различных методов схематизации случайных процессов нагружения элементов конструкций [19]. Наиболее часто исполь-

зуются методы размахов, размахов с учетом среднего, полных циклов и дождя [25, 39]. В результате использования таких методов обычно определяется число циклов нагружения N и строится распределение $f(s)$ амплитуд или размахов циклов нагружения за рассматриваемую историю нагружения на отрезке времени.

2. Второй подход связан с оценкой параметров случайных процессов нагружения, в зависимости от которых и производится оценка усталостной долговечности, например, от математического ожидания и среднеквадратичного отклонения ординат процесса [22, 23]. При этом применяется спектральный метод суммирования усталостных повреждений и оценки усталостной долговечности [22, 23, 61, 140]. К сожалению, для использования этого метода оценки ресурса натурных конструкций необходимо иметь информацию об усталостной долговечности в виде кривых усталости, построенных в зависимости от параметров случайных процессов, что требует проведения соответствующих усталостных испытаний. Такого рода испытания, естественно, проводились, но не получили должного распространения вследствие своей трудоемкости и высокой стоимости. Поэтому их использование для широкого класса конструкций и конструкционных материалов пока затруднительно.

При использовании указанного ранее способа замещения случайного процесса нагружения набором регулярных процессов нагружения, эквивалентных по повреждающему действию, это замещение производится по-разному. Среди большого числа методов схематизации следует особо выделить методы, наиболее адекватно описывающие поведение материала конструкции при случайном нагружении, которые позволяют выделить на осциллограмме напряжений замкнутые петли гистерезиса деформирования материала.

Остановимся более подробно на таких методах схематизации, как метод полных циклов и дождя. В основе этих методов как раз и лежит построение замкнутой петли гистерезиса деформирования материала конструкции, что и предопределяет их преимущество перед остальными. По оценкам А. С. Гусева, метод полных циклов дает оценку долговечности, которая наилучшим образом соответствует экспериментальным данным [25]. В то же время в некоторых источниках приводится лишь алгоритм метода дождя и указывается, что этот метод приводит к результатам, практически совпадающим с результатами, полученными по методу полных циклов, и более удобен для программирования на компьютере [36].

В англоязычной литературе предпочтение безоговорочно отдается методу дождя как методу, приводящему к наилучшим оценкам усталостной долговечности [107]. Это объясняется тем, что метод дождя позволяет описать процесс нагружения как наиболее соответствующий устойчивому поведению металла при циклическом деформировании, когда все размахи на графике зависимости напряжений и деформаций, учтенные как циклы, образуют замкнутые петли гистерезиса, а размахи, не образующие замкнутые петли, учитываются как полуциклы.

Кроме прямого подсчета числа циклов с помощью методов схематизации возможно оценивание распределения числа циклов по заданным свойствам стационарных гауссовских процессов нагружения, подсчитываемых по методу дождя [132] и методу полных циклов [24]. Однако несмотря на общее сходство этих методов преимущество имеет все-таки метод дождя – благодаря своей простой алгоритмизации и возможности обработки осциллограмм в реальном масштабе времени. Рассмотрим этот метод несколько подробнее.

Метод дождя для подсчета циклов нагружения при нерегулярных историях нагружения элементов конструкций, впервые предложенный М. Мацуиши и Т. Эндо в 1968 г. [122], получил весьма широкое распространение при расчетах усталостной долговечности. Известно большое число разнообразных алгоритмов – от классических [39, 139] до весьма специализированных [107, 126, 139]. Такое разнообразие объясняется стремлением исследователей сделать данный метод более удобным и приспособить его к решению различных конкретных задач, так как процедура, реализующая метод дождя по базовому алгоритму, имеет достаточно сложную последовательную структуру [39, 123]. Существует и более простой в применении алгоритм (соответствующий определению II у Дж. Коллинза [39]), однако он накладывает существенные ограничения на историю нагружения и предполагает ее предварительное (до обработки по методу дождя) исследование, тем самым делая невозможным обработку в реальном масштабе времени.

В одной из работ [108] предложены два упрощенных алгоритма метода дождя, строящихся на том, что внутри выделенного максимального по амплитуде цикла существуют только замкнутые петли гистерезиса. В первом алгоритме требуются предварительные прочтение и преобразование истории нагружения к виду, удобному для выделения максимального

цикла. Во втором алгоритме процедура выделения циклов начинается при первом прочтении, а выделение максимального цикла производится все-таки при дополнительном, втором, прочтении истории нагружения до найденного при первом прочтении абсолютного экстремума. И если этот экстремум найден довольно далеко от начала, то ощутимого преимущества второй алгоритм по сравнению с первым не дает. Обе эти процедуры могут вполне успешно использоваться в случае историй нагружения с четкими и повторяющимися блоками нагружения, как, например, для подъемно-транспортных машин. Однако для очень длинных историй нагружения, не содержащих повторяющихся характерных блоков, что имеет место для элементов автомобильного транспорта, шельфовых конструкций и др., применение этих процедур оказалось бы слишком расточительным по времени и может быть затруднено вследствие ограниченности компьютерной памяти.

Также существует алгоритм, позволяющий снять ограничение на длину истории нагружения, так как предусматривает ее обработку по сегментам, длина которых зависит от возможностей компьютера [112].

Кроме того, было предложено новое эквивалентное определение метода дождя, которое позволяет преодолеть недостатки описанных выше алгоритмов. Этот метод достаточно прост, не требует предварительного прочтения и преобразования истории нагружения и может быть использован в режиме онлайн, т. е. в реальном масштабе времени функционирования исследуемой конструкции. Еще одно важное преимущество этого метода – он более удобен для статистического анализа подсчитанных циклов нагружения по их амплитудам.

Сравнивая метод дождя с методом парных размахов, заключающийся в том, что каждому учитываемому размаху ставится соответствующее деформирование в противоположном направлении на такую же величину, можно говорить об их эквивалентности. Однако в некоторых случаях метод парных размахов является менее повреждающим, так как могут быть потеряны частичные размахи напряжений.

Метод полных циклов во многом аналогичен методу дождя, но его алгоритм принципиально построен на предварительном просмотре истории нагружения, что делает невозможным его использование в режиме онлайн. В случае обработки истории нагружения с выделенным максимальным циклом или замкнутой петли гистерезиса результаты подсчета методом полных циклов и дождя совпадают. При наличии глобальных полужик-

лов метод полных циклов является более повреждающим, так как здесь каждому размаху в соответствие ставится полный цикл. Отметим также, что некоторые процедуры алгоритма метода полных циклов аналогичны процедурам алгоритмов метода дождя [108, 130].

Проведенный анализ работ, посвященных методам схематизации, позволяет сделать вывод о безусловной определяющей роли метода дождя для подсчета и выделения циклов нагружения. Также можно утверждать, что методы полных циклов и размахов являются разновидностью метода дождя, который следует рассматривать как определяющий метод для задач усталостной долговечности. Вместе с тем, решение об использовании того или иного алгоритма следует ставить в зависимость от конкретной истории нагружения, а также задач исследования. При расчетах в программном обеспечении данной работы далее используются классический метод дождя [39], модифицированный метод [130], а также метод полных циклов [18].

Глава 2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕНАБЛЮДАЕМЫМИ ПРОЦЕССАМИ ДЕГРАДАЦИИ

В данной главе рассматривается задача определения оптимальных стратегий управления процессами деградации МС однократного и многократного действия по критерию математического ожидания интенсивности затрат на эксплуатацию, когда процесс деградации является ненаблюдаемым. В этом случае стратегии управления сводятся к правилам остановки и замены оборудования. Возможны два основных варианта решения данной задачи:

- априорное определение правил остановки и замены оборудования без получения дополнительной информации в процессе эксплуатации;
- использование алгоритмов оптимальной последовательной остановки при получении апостериорной информации о процессе деградации в процессе эксплуатации вычислительным способом.

Как было сказано ранее, следует различать методы оптимального управления наблюдаемыми и ненаблюдаемыми процессами деградации. Рассматриваемые в данной главе методы определения оптимальных правил остановки удобнее использовать для ненаблюдаемых процессов деградации. Если же есть возможность наблюдения, хотя бы периодического, за процессом деградации, то использование данных методов также возможно, но предпочтительным следует считать применение рассматриваемых в следующей главе двухуровневых политик управления и использование марковских процессов для описания процессов деградации.

Описание используемых далее вероятностных конструкций можно найти в стандартных учебниках по теории вероятностей [33, 83, 86].

2.1. Априорное определение правил остановки по функции распределения ресурса

Задачи технического обслуживания по критерию математического ожидания интенсивности затрат на эксплуатацию рассматриваются, как правило, для систем многократного действия, когда функционал качества эксплуатации в силу закона больших чисел может быть представлен в виде отношения математического ожидания затрат на одном цикле эксплуатации к математическому ожиданию длительности этого цикла. Исследования же подобного функ-

ционала качества для систем однократного действия при стратегии профилактических замен показали, что эти функционалы дают различные результаты и по величине все значения удельных затрат больше, чем в случае вычисления удельных затрат при многократных заменах [55].

Ниже показано, что функционал качества однократных систем при определенных условиях всегда дает завышенную оценку стоимости удельных затрат по сравнению с оценкой функционала качества многократных систем. Доказано, что при использовании стратегии профилактических замен оборудования время до замены имеет вырожденную функцию распределения. Также приводятся условия оптимальности времени до замены.

2.1.1. Основное соотношение между математическими ожиданиями интенсивности затрат

Наиболее часто используемый критерий для оценки качества эксплуатации технических систем представляет собой отношение затрат X на одном цикле эксплуатации к длительности этого цикла θ : $\frac{X}{\theta}$. Если эксплуатация подразумевает многократную замену элемента или всей системы, то расчетным функционалом становится отношение математических ожиданий этих случайных величин:

$$R_1 = \frac{EX}{E\theta}.$$

Однако в случае, когда нас интересует эксплуатация системы однократного действия, подобный подход уже не может считаться удовлетворительным и следует оценивать качество эксплуатации системы посредством математического ожидания отношения затрат к длительности цикла эксплуатации:

$$R_2 = \frac{EX}{E\theta}.$$

Здесь под длительностью цикла эксплуатации понимается время до остановки эксплуатации вообще или время до замены в том случае, когда количество замен невелико и, значит, функционал первого типа неприемлем. Ниже приводятся некоторые результаты, позволяющие понять соотношение между этими двумя функционалами.

Лемма 1. Если $\varphi(x)$ – вогнутая функция на интервале $[0, \infty)$, то $\frac{\varphi(x)}{x}$

также вогнутая.

Доказательство. Для доказательства можно ограничиться классом бэровских функций, тогда определению вогнутости $\varphi(x)$ можно придать следующий вид:

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2}.$$

Данное неравенство может быть продолжено справа следующим образом:

$$\leq \varphi(x_1) + \varphi(x_2) \leq \varphi(x_1) \left(1 + \frac{x_2}{x_1}\right) + \varphi(x_2) \left(1 + \frac{x_1}{x_2}\right) = (x_1 + x_2) \left(\frac{\varphi(x_1)}{x_1} + \frac{\varphi(x_2)}{x_2}\right).$$

Разделим левую часть исходного неравенства и последнее полученное выражение сначала на $(x_1 + x_2)$, а затем еще на 2. В результате чего получим, что

$$\frac{\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}{\frac{x_1 + x_2}{2}} \leq \frac{\frac{\varphi(x_1)}{x_1} + \frac{\varphi(x_2)}{x_2}}{2}.$$

Последнее неравенство и свидетельствует о вогнутости искомой функции.

Лемма 2. Если θ – положительная невырожденная случайная величина с конечным математическим ожиданием, а I – индикатор некоторого события, то

$$\frac{1}{E I \theta} \leq E \frac{I}{\theta}.$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству утверждения $\frac{1}{E I \theta} \leq E \frac{I}{\theta}$, учитывая, что $1 = E \frac{I}{\sqrt{\theta}} I \sqrt{\theta} \leq E \frac{I}{\theta} E I \theta$, а $I_2 = I$.

Теорема 1. Если для двух положительных невырожденных случайных величин X и θ , причем θ имеет конечное математическое ожидание,

заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{J}, P)$, условное математическое ожидание $E(X|\theta) = \varphi(\theta)$ есть вогнутая функция, то

$$\frac{EX}{E\theta} \leq E \frac{X}{\theta}. \quad (2.1.1)$$

Доказательство. Рассмотрим $E \frac{X}{\theta}$, где X и θ – возможно зависимые случайные величины. Тогда существует сигма-алгебра \mathfrak{J}_θ , $\mathfrak{J}_\theta \in \mathfrak{J}$, такая, что можно представить математическое ожидание отношения двух случайных величин как $E \frac{X}{\theta} = E \left(\frac{E(X|\theta)}{\theta} \right)$. Это равенство следует из того, что $E \left(\frac{X}{\theta} | \theta \right) = \frac{1}{\theta} E(X|\theta)$, поскольку $\frac{1}{\theta}$ измерима по \mathfrak{J}_θ , а также формулы полного математического ожидания $E \frac{X}{\theta} = E \left(E \left(\frac{X}{\theta} | \theta \right) \right)$.

Итак, $E(X|\theta)$ есть \mathfrak{J}_θ – измеримая случайная величина, с одной стороны. И в то же время ее можно рассматривать как \mathfrak{J}_θ -измеримую функцию. Отсюда следует, что существует такая борелевская функция $\varphi(\bullet)$, определенная на действительной прямой, что

$$\varphi(\theta) = E(X|\theta). \quad (2.1.2)$$

Тогда в силу сделанного предположения о вогнутости (2.1.2) легко показать, что $\frac{\varphi(x)}{x}$ – также вогнутая функция (см. лемму 1) и для нее можно воспользоваться неравенством Иенсена

$$\frac{\varphi(E\theta)}{E\theta} \leq E \frac{\varphi(\theta)}{\theta}. \quad (2.1.3)$$

Но поскольку $\varphi(\theta)$ определяется на самом деле уравнением (2.1.2) и предыдущие равенства также выполняются, то (2.1.3) превращается в следующее неравенство:

$$\frac{\varphi(E\theta)}{E\theta} \leq E \frac{X}{\theta}.$$

Рассмотрим теперь более подробно, что такое $\varphi(E\theta)$. По своим свойствам это есть условное математическое ожидание случайной величины от σ -алгебры, порожденной другой случайной величиной. Однако в данном случае вместо случайной величины мы имеем константу, для которой также можно составить σ -алгебру, но как тривиальную: $\mathfrak{F}_* = \{\emptyset, \Omega\}$, поскольку на всем пространстве Ω эта случайная величина постоянна. Тогда, пользуясь свойством условных математических ожиданий $E(X|\mathfrak{F}_*) = EX$, окончательно получаем искомое неравенство (2.1.1).

Замечание. Следует подчеркнуть, что по определению $\varphi(\theta)$ равенство $\varphi(E\theta) = E(X|\theta = E\theta)$ не имеет отношения к нашему случаю. Подобная функция, рассматриваемая как условное математическое ожидание относительно события $\{\theta = E\theta\}$, будет рассмотрена далее в теореме 2.

2.1.2. Стратегия восстановления в зависимости от возраста

Рассмотрим простейшую стратегию восстановления системы, когда возможно производить превентивные замены оборудования (до наступления его отказа).

Стратегия. Система восстанавливается полностью после отказа. Если она проработала без отказов заданный интервал времени τ , то проводится профилактическая замена и система восстанавливается также полностью.

Известно, что для случая систем многократного действия, рассмотренных ниже, при использовании данной стратегии время до замены является детерминированной величиной, что доказывается посредством сведения возможного класса функций распределения данной величины к классу вырожденных функций [2]. Приведем аналогичное доказательство для систем однократного действия.

Теорема 2. Если функционал качества R_2 имеет конечное математическое ожидание, и его условное математическое ожидание при условии, что $\{\tau = t\}$, $m(\tau) = E(\xi|\tau) = E\left(\frac{X}{\theta}|\theta\right) = \frac{1}{\theta}E(X|\theta)$, есть неотрицательная, ограниченная, интегрируемая и непрерывная функция на $(0, \infty)$, то при использовании стратегии восстановления в зависимости от возраста время до замены τ имеет вырожденную функцию распределения.

Доказательство. Для доказательства данного утверждения снова воспользуемся аппаратом условных математических ожиданий. Рассмотрим функционал качества теперь как функцию от τ , т. е. $E \frac{X}{\theta} = E \frac{X(\tau)}{\theta(\tau)}$. Тогда можно записать следующую цепочку равенств:

$$E \frac{X}{\theta} = EE \left(\frac{X}{\theta} \mid \tau \right) = EE (\xi \mid \tau) = Em(\tau).$$

Здесь приняты следующие обозначения: $\xi = \frac{X}{\theta}$, $m(\tau) = E(\xi \mid \tau)$. Последнее равенство справедливо, поскольку такая борелевская функция $m(t)$ существует и называется условным математическим ожиданием ξ при условии, что $\{\tau = t\}$. Далее, по теореме о замене переменных под знаком интеграла Лебега справедливо равенство

$$Em(\tau) \int_{\Omega} m(\tau) dP = \int_0^{\infty} m(t) dP_{\tau}(t). \quad (2.1.4)$$

Очевидно, что мере $P_{\tau}(t)$ соответствует некоторая функция распределения $G(t)$. Это означает, что последний интеграл из равенства (2.1.4) можно заменить на

$$J_1 = \int_0^{\infty} m(t) dP_{\tau}(t).$$

Рассмотрим теперь класс всех возможных собственных функций распределения. Следующий шаг состоит в том, чтобы выделить из него подкласс вырожденных функций, т. е. таких, которые имеют вид

$$G(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0 \\ 1, & t_0 \leq t < \infty \end{cases}.$$

Тогда J_1 становится равным $J_1 = m(t_0)$ и, если $m(t_0)$ – непрерывная положительная функция на действительной прямой, имеющая глобальный минимум, то можно найти такую точку t_0^* , что $m(t_0^*) \leq m(t_0)$ для любой другой точки $t_0 \in [0, \infty]$. Рассмотрим теперь интеграл Лебега – Стильтьеса из равенства (2.1.4):

$$J_2 = \int_0^{\infty} m(t) dP_{\tau}(t).$$

Известно, что если функция $m(t)$ ограничена, интегрируема и непрерывна на $[0, \infty]$, то можно воспользоваться теоремой о среднем и получить равенство

$$\int_0^{\infty} m(t) dP_{\tau}(t) = m(t') \cdot 1, \quad t' \in (0, \infty),$$

так как мера $P_{\tau}(t)$ дает, соответственно, единицу. Но поскольку t_0^* – точка минимума $m(t)$ и ей соответствует единственная вырожденная функция $G^*(t)$, то для любых других функций распределения мы получим неравенство

$$\int_0^{\infty} m(t) G^*(dt) \leq \int_0^{\infty} m(t) dP_{\tau}(t),$$

откуда и следует, что оптимальной стратегией является детерминированное время до замены при использовании функционала R_2 .

Замечание. Трудно ожидать от функции $m(t)$ конечности на $[0, \infty]$, поскольку эта функция, как правило, вогнутая и стремится к ∞ на концах этого отрезка. Однако если мы заменим концы $[0, \infty]$ какими-либо приемлемыми константами a и b (исходя из практических соображений) и проинтегрируем на этом отрезке $[a, b]$ функции распределения, то можно будет считать условия теоремы 2 выполненными полностью и сделать соответствующий вывод о стратегии замен.

2.1.3. Простейший функционал качества

Время до отказа T является случайной величиной с функцией распределения $F(t)$. Время же до профилактической замены τ считаем в силу теоремы 2 детерминированной величиной. Рассмотрим два случая решения этой задачи для систем многократного и однократного действия; при этом неравенство (2.1.1) оказывается весьма полезным для установления иерархии между значениями удельных затрат. Однако это неравенство между отношением математических ожиданий и математическим ожиданием отношения двух случайных величин требует дополнительного доказательства, если случайная величина X имеет вид

$$X = c + dI\{T \leq \tau\}, \quad (2.1.5)$$

поскольку X не является вогнутой функцией. Здесь c и d – постоянные величины, определяющие стоимость остановки эксплуатации c и, возможно, замены, а также добавочную цену d в случае аварийной остановки.

Теорема 3. Если случайная величина X имеет вид (2.1.5), то выполняется неравенство (2.1.1).

Доказательство. Обозначим $A = \{T \leq \tau\}$. Тогда выполняется известное равенство для индикаторов $I_A + I_{\bar{A}} = 1$, где $\bar{A} + A = \Omega$.

Воспользуемся легко выводимым неравенством $\frac{1}{E\theta} \leq E\frac{1}{\theta}$ (см. лемма 2).

Поскольку $E I_A \theta \leq E\theta$, то знак неравенства не изменится и оно примет вид

$$\frac{1}{E\theta} \leq E\frac{1}{\theta}.$$

Домножая обе части последнего неравенства на d , а также его левую часть на $P\{A\}$, меньшую или равную 1, получим

$$\frac{dP\{A\}}{E\theta} \leq E\frac{dI_A}{\theta}.$$

Дополнительно отмечая, что справедливо также неравенство

$$\frac{c}{E\theta} \leq E\frac{c}{\theta},$$

получаем искомое неравенство (2.1.1), которое представим в виде

$$\frac{c + dP\{A\}}{E\theta} \leq E\frac{c + dI_A}{\theta}.$$

2.1.4. Система однократного действия

Оптимальное значение τ^* необходимо найти из задачи минимизации по τ следующего функционала качества обслуживания:

$$R_2(\tau) = E\left(\frac{X}{\theta}\right) = E\left(\frac{c + dI\{T \leq \tau\}}{\min\{T, \tau\}}\right), \tau > 0, \quad (2.1.6)$$

где c – стоимость затрат на профилактическую остановку;
 $c+d$ – стоимость затрат на устранение результатов аварийной остановки.

Воспользовавшись тем, что функция распределения случайной величины T известна, можно (2.1.6) преобразовать к виду

$$R_2(\tau) = (c + d) \int_0^{\tau} \frac{f(t)}{t} dt + c \frac{1}{\tau} \overline{F}(\tau), \quad (2.1.7)$$

где $\overline{F}(t) = 1 - F(t)$, а $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$.

Естественно потребовать, чтобы интеграл в (2.1.7) был сходящимся. Это означает, что не все функции распределения времени до отказа системы пригодны для вычисления стоимости затрат. Так, например, не подходит экспоненциальное распределение – интеграл становится расходящимся в точке 0.

Теорема 4. Чтобы (2.1.7) имела экстремум в точке τ^* , необходимо, чтобы в этой точке выполнялось условие

$$\lambda(\tau^*) = \frac{c}{d} \cdot \frac{1}{\tau^*},$$

где $\lambda(t)$ – функция интенсивности; и достаточно, чтобы в этой точке осуществлялся переход функции интенсивности $\lambda(t)$ через кривую $\frac{c}{d} \cdot \frac{1}{t}$ снизу вверх или сверху вниз.

Доказательство. Доказательство необходимости осуществляется посредством взятия производной от (2.1.7), а достаточности – следует из общих условий экстремума функций, а также из знания того, что

$$f(t) = \lambda(t) \overline{F}(t), \quad \overline{F}(t) = \exp \left(- \int_0^t \lambda(t) dt \right).$$

Для уяснения этой теоремы приведем рисунок, где изображены соотношения между интенсивностью отказа и самой функцией стоимости (рис. 2.1.1). Ясно, что точек экстремума может быть либо ни одной, либо одна, либо больше одной. Последняя ситуация изображена как раз на рис. 2.1.1, и данный график можно сравнить с графиком из справочника «Надежность и эффективность в технике» [55, с. 44].

Следующая теорема дает некоторый ответ на вопрос о том, каково расположение этих точек.

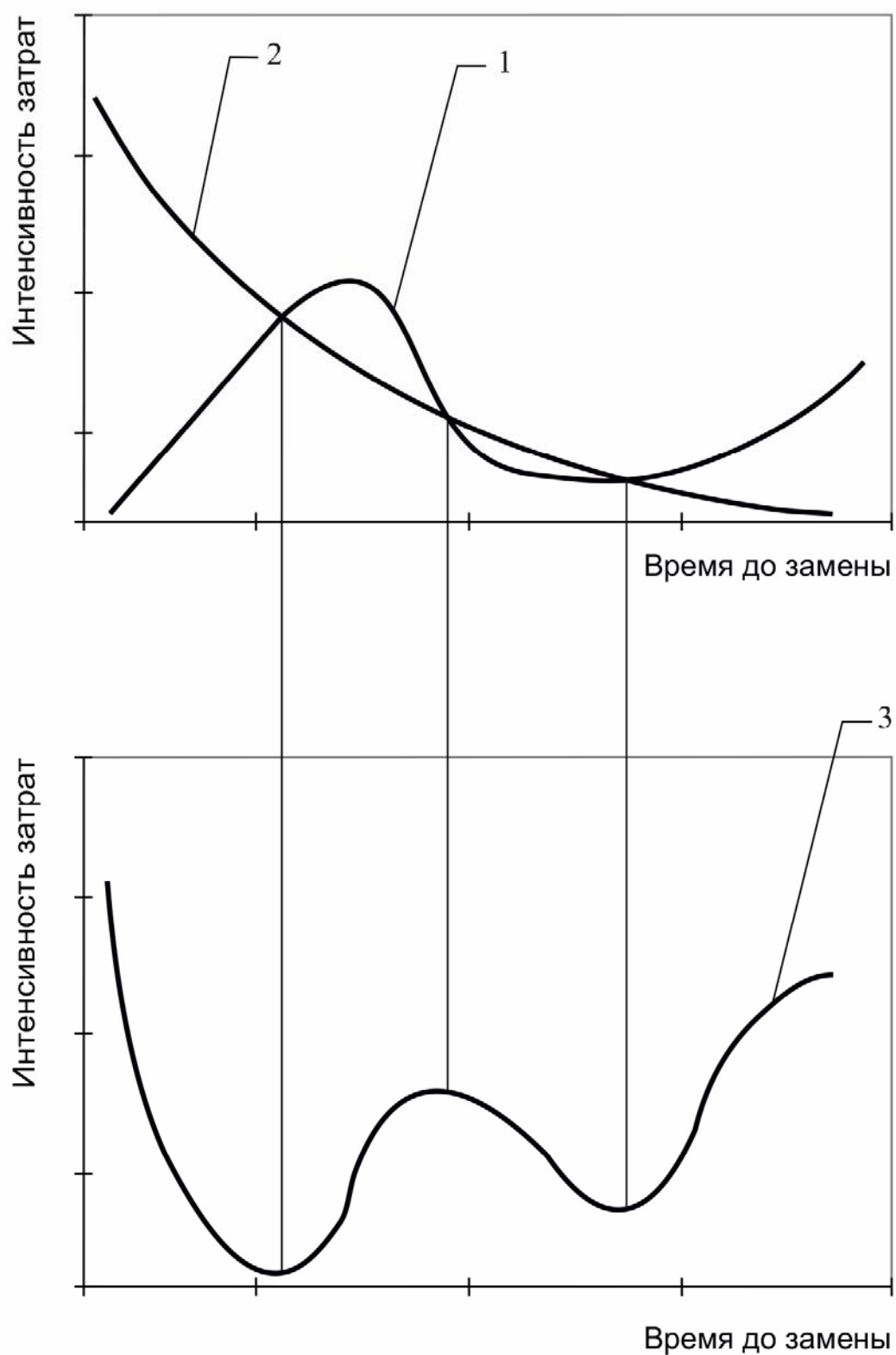


Рис. 2.1.1. Соотношение между интенсивностью отказа и функцией стоимости для систем однократного действия:

I – кривая интенсивности отказов; 2 – кривая функции ct / d ; 3 – кривая функции затрат

Теорема 5. Если функционал (2.1.7) имеет один или больше экстремумов, то первая точка экстремума τ_1^* есть точка минимума.

Доказательство. Чтобы доказать это утверждение, надо показать, что на интервале $[0, \tau_1^*)$, $\tau_1^* < \infty$, функция интенсивности $\lambda(t)$ всегда меньше кривой $\frac{c}{d} \cdot \frac{1}{t}$:

$$\lambda(t) < \frac{c}{d} \cdot \frac{1}{t}. \quad (2.1.8)$$

Предположим обратное: существует такая $\lambda(t)$, что выполняется неравенство $\lambda(t) \geq \frac{c}{d} \cdot \frac{1}{t}$. Поскольку это положительные функции, то справедливо, что и интеграл от левой и правой части неравенства не изменит его знак:

$$\int_0^{\tau_1^*} \lambda(t) dt \geq \frac{c}{d} \int_0^{\tau_1^*} \frac{dt}{t} \Rightarrow -\ln \bar{F}(\tau_1^*) \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c}{d} [\ln(\tau_1^*) - \ln(\varepsilon)].$$

Из последнего неравенства следует, что конечная величина должна быть больше бесконечной, что приводит к противоречию и неравенство (2.1.8) выполняется.

Следовательно, если точки пересечения этих функций существуют, то первая точка есть точка минимума.

Следствие. Из этой теоремы следует, что не существует функции распределения, функция интенсивности которой была бы больше, чем $\frac{1}{t}$, $0 < t < \infty$.

Замечание. Приведенные здесь функции не обязательно вогнутые, но они отражают реальную ситуацию, когда функция может не быть вогнутой, но иметь минимум. К сожалению, в таком случае первые две теоремы, по-видимому, не имеют места. Если же функции вогнутые, то все встает на свои места, и оптимальность детерминированной стратегии, и соотношение между функционалами выполняются вполне.

2.1.5. Система многократного действия

Рассматривается задача в подобной же постановке, только функционал качества представляется в следующем виде:

$$R_1(\tau) = \frac{EX}{E\theta} = \frac{c + dP\{T \leq \tau\}}{E \min\{T, \tau\}}, \tau > 0.$$

Последнее равенство можно представить в виде [1]

$$R_1(\tau) = \frac{c + dF(\tau)}{\int_0^{\tau} \overline{F}(t) dt}. \quad (2.1.9)$$

Соответствующее условие экстремума для (2.1.9) есть корни уравнения

$$\lambda(\tau) \int_0^{\tau} \overline{F}(t) dt - F(t) = \frac{c}{d}. \quad (2.1.10)$$

В работе Ф. Байхельта и П. Франкена «Надежность и техническое обслуживание. Математический подход» [1] подробно разбирается решение этой задачи и приводятся условия существования минимума, поэтому перейдем к рассмотрению числового примера для понимания различия между решениями этих двух задач.

Иллюстративный пример. Рассмотрим иллюстративный пример, составленный на базе примера из уже упоминаемой работы Ф. Байхельта и П. Франкена [1]. Предварительно нам потребуется определить порядок вычисления определенного интеграла

$$J = \int_0^{\tau} \frac{e^{-at} - e^{-2at}}{t} dt. \quad (2.1.11)$$

Известно, что следующий интеграл имеет первообразную, представленную следующим рядом:

$$\int \frac{e^{at}}{t} dt = \ln t + \frac{at}{1 \cdot 1!} + \frac{(at)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(at)^3}{3 \cdot 3!}. \quad (2.1.12)$$

Кроме того, известно, что определенный интеграл $\int_{-\infty}^{\tau} \frac{e^{at}}{t} dt$ называется интегральной показательной функцией, причем при $\tau > 0$ интеграл расходится в точке $\tau = 0$. Поэтому рассмотрение интеграла (2.1.11) представляет

особый интерес. Воспользуемся определением несобственного интеграла. Тогда

$$J = \left[\ln \tau - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha\tau)^n}{n \cdot n!} - \ln \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\alpha\tau)^n}{n \cdot n!} \right] - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln \varepsilon - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\varepsilon\tau)^n}{n \cdot n!} - \ln \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\varepsilon\tau)^n}{n \cdot n!} \right].$$

Из последнего выражения получаем окончательный ответ:

$$J = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2^n - 1) (\alpha\tau)^n}{n \cdot n!}. \quad (2.1.13)$$

Теперь необходимо позаботиться, чтобы этот интеграл существовал. Поскольку (2.1.13) – знакопеременный ряд, то для его сходимости по теореме Лейбница достаточно, чтобы члены ряда монотонно убывали по величине и имели пределом 0. Чтобы члены ряда убывали, достаточно, чтобы соблюдалось требование

$$\tau < \frac{4}{3\alpha} < \frac{27}{14\alpha} < \dots \quad (2.1.14)$$

Ясно, что скорость сходимости $n \cdot n!$ к ∞ больше, чем у $2^n - 1$. Также требуется, чтобы $(\alpha\tau)^n < n$. В частности, при $\alpha = 2$ и соблюдении (2.1.14) последнее неравенство выполняется, и тогда член ряда (2.1.13) убывает и стремится к нулю.

Итак, интеграл (2.1.13) в наших условиях является сходящимся интегралом, и по той же теореме Лейбница его значение не превышает первого члена ряда (2.1.13): $J \leq \alpha\tau$.

Далее перейдем непосредственно к решению задачи управления. Пусть известны все характеристики времени до отказа при $\alpha = 2$: $F(t) = (1 - e^{-\alpha t})^2$, $\bar{F}(t) = (2 - e^{-\alpha t})e^{-\alpha t}$, $f(t) = 2\alpha(1 - e^{-\alpha t})e^{-\alpha t}$, $\lambda(t) = \frac{2\alpha(1 - e^{-\alpha t})}{(2 - e^{-\alpha t})}$, $ET = \frac{3}{2\alpha}$.

Тогда оптимальные значения для первого функционала достигаются при $\tau_1^* = 0,4$, а для второго при $\tau_2^* = 0,2$ в точках пересечения соответствующих кривых. Способ вычисления интеграла (2.1.7) указан выше. Графики, отражающие исследуемые функции, приведены на рис. 2.1.2, а. Дополнительно приведем графики производных $\frac{dR_1}{d\tau}$ и $\frac{dR_2}{d\tau}$, которые могут

быть выражены функционально через характеристики времени до отказа (рис. 2.1.2, б) и графики самих функционалов качества $R_1(\tau)$ и $R_2(\tau)$ (рис. 2.1.2, в).

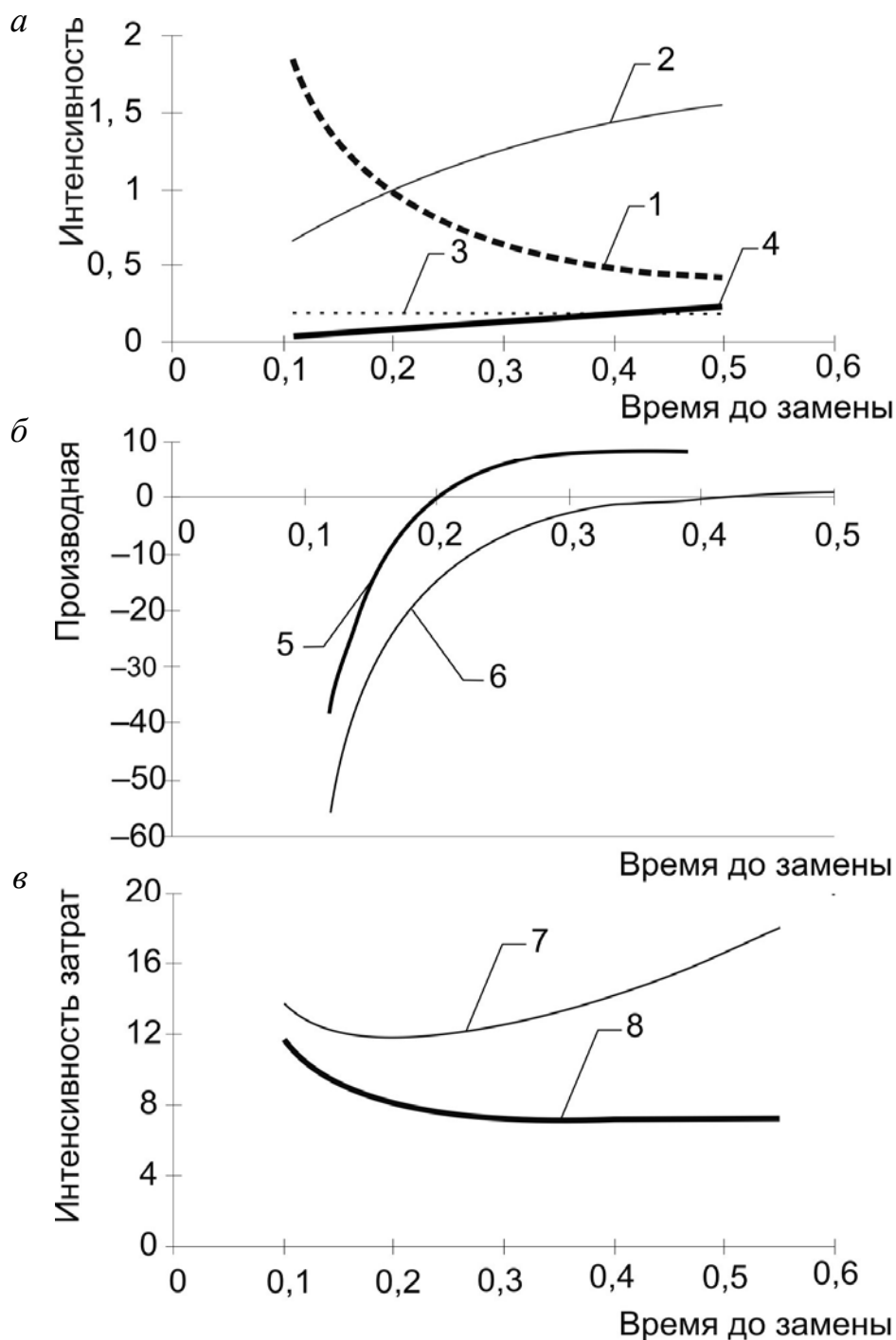


Рис. 2.1.2. Значения оптимального времени до замены:

a – интенсивности отказов: 1 – интенсивность отказов; 2 – функция ct/d ; кривая 3 – левая часть уравнения (2.1.10); 4 – правая часть уравнения (2.1.10); $б$ – производные

функций затрат: 5 – производная $\frac{dR_2}{d\tau}$; 6 – производная $\frac{dR_1}{d\tau}$, $в$ – сами функции:

7 – функция $R_2(\tau)$; 8 – функция $R_1(\tau)$

Из рис. 2.1.2¹ видно, что разница между оптимизационными задачами двух типов составляет 100 %, что не может считаться приемлемым для определения сроков профилактических замен оборудования разового действия. Обычно используемый функционал интенсивности затрат для систем многократного действия в этом случае может привести к катастрофическим последствиям.

Данный параграф дает представление об основных соотношениях между функционалами двух типов, в частности, о мажорирующем свойстве функционала второго типа, используемого для систем однократного действия. Приведенный пример наглядно иллюстрирует это свойство. Кроме того, полученные условия оптимальности для функционала систем однократного действия позволяют достаточно просто найти оптимальное значение времени до профилактической остановки. В случае более сложных распределений ресурса – таких, как нормальное, логнормальное и др., приходится использовать вычислительные процедуры уже в полном объеме.

2.2. Оптимальная остановка ненаблюдаемого процесса деградации

Предлагается процедура оптимальной остановки процесса деградации элемента МС, подверженного циклической нагрузке, на примере развития в нем усталостных повреждений. Если в предыдущем параграфе рассматривались ситуации, когда о процессе деградации не было известно почти ничего, за исключением знания закона распределения ресурса, то сейчас будут рассматриваться ненаблюдаемые процессы накопления усталостных повреждений, которые имеют некоторый описываемый моделью механизм накопления повреждений. В простейшем случае предполагается, что известны, по крайней мере, история нагружения и закон накопления повреждений. В частности, далее используется линейное правило накопления повреждений, а прогнозирование остаточного распределения ресурса производится с помощью последовательной переоценки плотности распределения ресурса.

2.2.1. Последовательная переоценка плотности распределения остаточного ресурса

Пусть $f(x)$, $x \in [0, \infty]$, обозначает плотность распределения ресурса N некоторого элемента МС при постоянной амплитуде нагружения. Предпо-

¹ Рисунок дан в редакции автора (примеч. ред.).

лагается, что все подобные элементы образуют некоторое определенное множество образцов, принадлежащих одной генеральной совокупности, и могут быть испытаны только при одинаковых условиях знакопеременного нагружения. Время эксплуатации, измеряемое в числе циклов нагружения, делится на равные периоды посредством Δx : x_1, x_2, \dots, x_i так, что $x_i = x_{i-1}$ есть число циклов нагружения к окончанию периода i . Предположим также, что в конце каждого периода эксплуатации возможно произвести остановку эксплуатации и оценку остаточного распределения ресурса. Вероятность отказа до конца периода i определяется посредством уравнения

$$P\{N \leq x_i\} = \int_0^{x_i} f(x) dx,$$

а вероятность, что отказа не произойдет p_i , как

$$p_i = P\{N > x_i\} = \int_{x_i}^{\infty} f(x) dx. \quad (2.2.1)$$

Разница между этими вероятностями показана на рис. 2.2.1, *a*, где вероятность p_i изображена как заштрихованная область, расположенная под кривой плотности распределения ресурса.

Остаточное распределение ресурса определяется как $P\{N < x | N > x_i\}$, $x > x_i$, а соответствующая плотность распределения – как

$$f_i^{ps} = f(x)/p_i, x > x_i, \quad (2.2.2)$$

поскольку пока другой информации о том, как накапливаются усталостные повреждения в элементе, нет. Известно лишь об отказе или неотказе элемента до момента x_i . Данная ситуация на рис. 2.2.1, *a* показана как поднятие кривой плотности распределения на величину $1/p_i$.

Следует знать, что происходит с плотностью распределения остаточного ресурса на следующем шаге принятия решения об остановке $i+1$, когда $x > x_{i+1}$. Апостериорная функция $f_i^{ps}(x)$ шага i становится для шага $i+1$ априорной функцией, как это показано на рис. 2.2.1, *a*, которую удобно переобозначить через $f_{i+1}^{pr}(x)$, т. е.

$$f_{i+1}^{pr}(x) = f_i^{ps}(x), x > x_{i+1}. \quad (2.2.3)$$

Условная вероятность отказа на этом шаге вычисляется с помощью следующего уравнения:

$$p_{i+1}^* = P\{N > x_{i+1} \mid N \geq x_i\} = \int_{x_{i+1}}^{\infty} f_{i+1}^{pr}(x) dx. \quad (2.2.4)$$

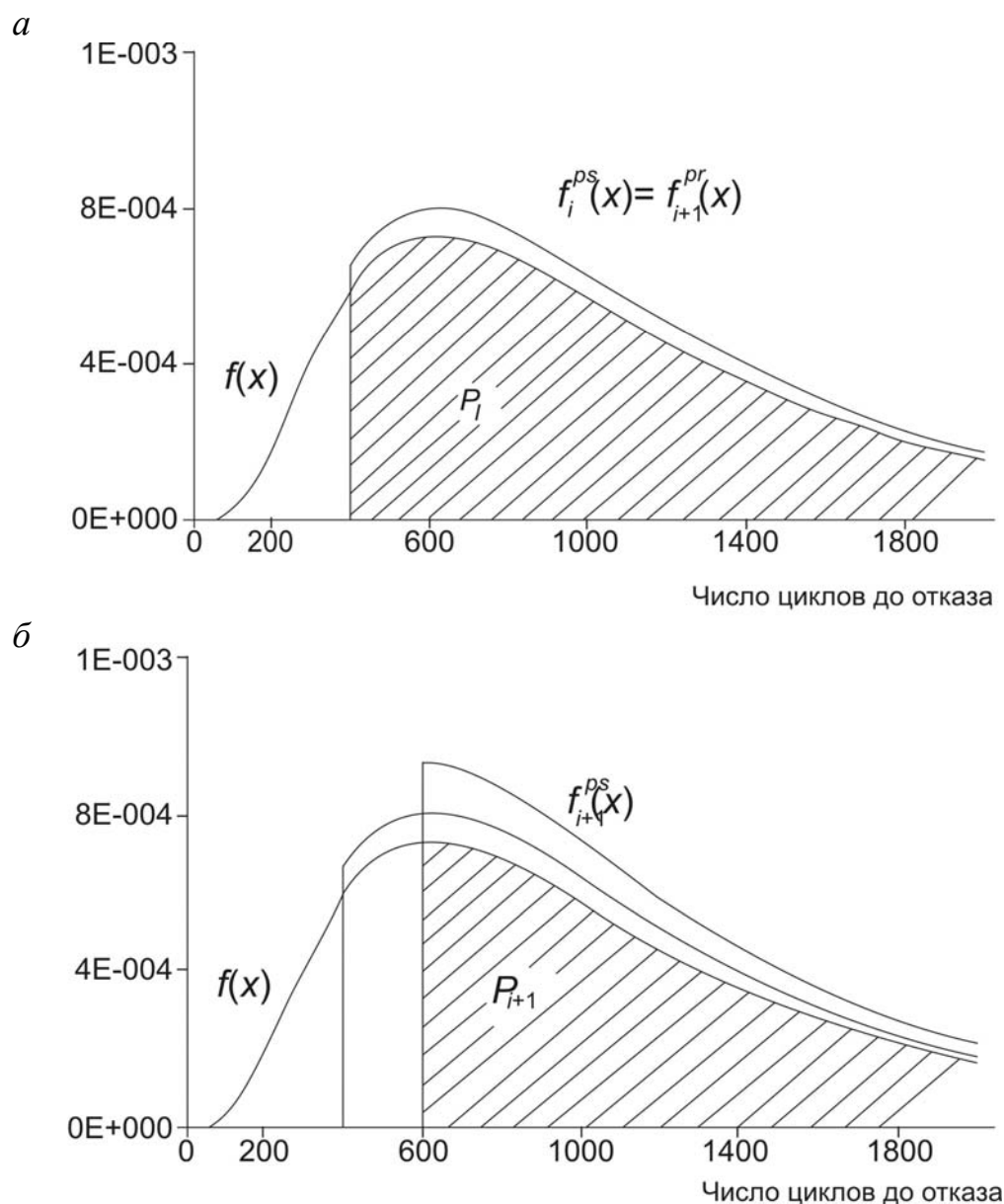


Рис. 2.2.1. Преобразование плотности распределения ресурса
в плотность остаточного ресурса:

a – при шаге i ; $б$ – при шаге $i+1$

Если к моменту x_{i+1} отказа не произошло, то возможно сформировать апостериорную плотность распределения остаточного ресурса

$$f_{i+1}^{ps}(x) = f_{i+1}^{pr}(x) / p_{i+1}^*, x > x_{i+1}. \quad (2.2.5)$$

Теперь можно, основываясь на уравнениях (2.2.1–2.2.3), более кратко записать уравнение (2.2.4):

$$p_{i+1}^* = p_{i+1}/p_i, \text{ где } p_{i+1}^* = \int_{x_{i+1}}^{\infty} f(x)dx.$$

Последняя вероятность показана в виде заштрихованной области на рис. 2.2.1, б. Следовательно, апостериорная плотность, определяемая уравнением (2.2.5), может быть записана в виде

$$f_{i+1}^{ps}(x) = f(x)/p_i, x > x_{i+1}.$$

Итак, получено следующее утверждение: на каждом шаге i , если известно только произошел отказ или нет, плотность распределения остаточного ресурса может быть выражена через исходную плотность $f(x)$ распределения ресурса как

$$f_{i+1}^{pr}(x) = f_{i+1}^{ps}(x) = f(x)/p_i, x > x_i, \quad (2.2.6)$$

где p_i определяется уравнением (2.2.1).

Полученное выше утверждение и приведенную последовательность переоценки плотности распределения остаточного ресурса следует рассматривать в качестве основной идеи и начального алгоритма формирования оптимального правила остановки. В более сложном случае нагружения, естественно, переоценка принимает более сложный вид и заключается не только в поднятии кривой плотности, как показано далее в п. 2.2.4.

2.2.2. Линейная модель накопления усталостных повреждений при регулярной истории нагружения

С целью рассмотрения методов оптимальной остановки процессов деградации обратимся сначала к простейшей модели накопления усталостных повреждений в элементе МС. Предположим, что элемент подвержен нагрузке с постоянной амплитудой нагружения, и будем считать, что плотность распределения ресурса $f(x)$ для данной амплитуды известна. Если формально следовать линейному правилу накопления повреждений, то повреждение μ за один цикл нагружения составляет величину $\mu = 1/N$. Если же было приложено несколько таких циклов нагружения, то накопленное повреждение определяется равенством

$$\mu = (1/N) + (1/N) + \dots \quad (2.2.7)$$

Будем считать, что принята врожденная модель накопления повреждений. Если бы можно было доводить один и тот же образец до отказа при

одинаковой истории нагружения, то плотность распределения ресурса выродилась бы в δ -функцию. Поскольку такой возможности нет, то плотность $f(x)$ представляет собой описание вероятностной структуры генеральной совокупности образцов; какой же именно образец находится под проводимым испытанием, неизвестно. Однако можно утверждать, что в знаменателе (2.2.7) стоит одна и та же детерминированная величина, хотя и не известная нам, представленная выборочным значением случайной величины.

Если к моменту x_i разрушения не произошло, то можно утверждать, что из общего пространства элементарных событий Ω не реализовалась какая-то его часть, причем вероятность этого события p_i известна (см. предыдущий параграф). Следовательно, можно утверждать, что испытуемый образец не принадлежит совокупности, показанной как заштрихованная часть на рис. 2.2.2, с указанной вероятностью.

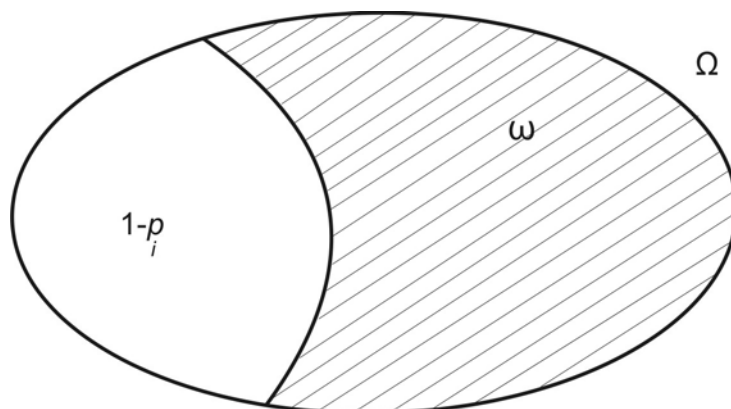


Рис. 2.2.2. Интерпретация вероятности p_i отказа элемента на шаге i

1. Линейная модель накопления повреждений

При такой модели накопления повреждений, если циклов нагружения было x , то повреждение накапливается по следующей формуле:

$$\mu = \begin{cases} x/N, & N > x \\ 1, & N \leq x \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Априорная плотность распределения накопленного повреждения определяется из уравнения

$$\phi_i^{pr}(y, x) = \begin{cases} \phi(y, x), & y \in (0, 1) \\ 1 - p_i \delta(y - 1), & y \in [0, 1] \end{cases} \quad (2.2.9)$$

где $\phi(y, x) = f\left(\frac{x}{y}\right) \frac{x}{y^2}$;

$y \in (0, 1)$;

$p_i = \int_0^1 \phi(y, x) dx$ – вероятность отказа на шаге i .

Апостериорная функция распределения определяется после этого же шага:

$$\phi_i^{ps}(y, x) = \phi_i^{pr}(y, x) / p_i, y \in (0, 1). \quad (2.2.10)$$

Преобразование функций накопленного повреждения (2.2.9–2.2.10) показано на рис. 2.2.3, где скачок априорной плотности распределения помечен знаком «×» в точке, которая имеет вес, равный вероятности $(1 - p_i)$ на периоде x_i .

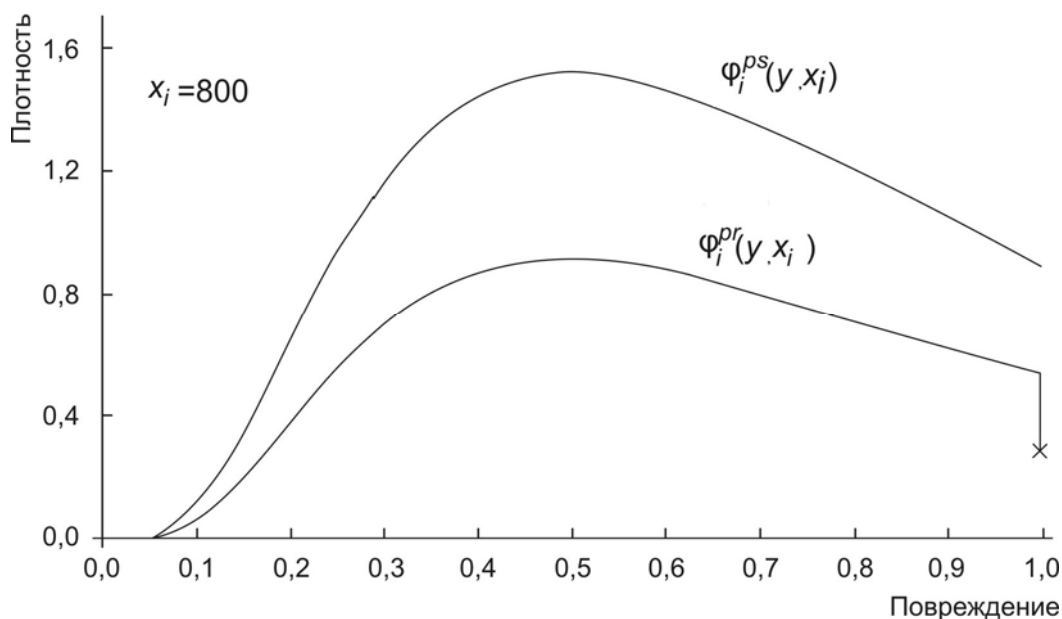


Рис. 2.2.3. Преобразование априорной плотности распределения накопленного повреждения в апостериорную

2. Условная вероятность отказа

Для последующих рассуждений требуется найти условную вероятность отказа R_i на каждом шаге:

$$R_i = P\{\text{отказ на шаге } i + 1 \mid \text{не было отказа до шага } i\}. \quad (2.2.11)$$

Вероятность (2.2.11) может быть представлена как $R_i = P\{\text{отказ на шаге } i + 1\} / P\{\text{не было отказа до шага } i\}$, поскольку событие в числителе является подмножеством события, расположенного в знаменателе. В терминах накопления повреждений последняя вероятность выглядит так:

$$R_i = P\{\mu(x) = 1, x_i < x \leq x_{i+1}\} / P\{\mu(x_i) < 1\}, \quad (2.2.12)$$

где $P\{\mu(x_i) < 1\} = P\{N > x_i\}$.

Причем предполагается, что повреждение может стать равным 1 между x_i и x_{i+1} включительно. Таким образом, число циклов до отказа может быть определено из линейного правила накопления повреждений посредством уравнения

$$1 = x/N, x \in (x_i, x_{i+1}], \quad (2.2.13)$$

а следовательно, N само принадлежит интервалу $(x_i, x_{i+1}]$.

Отсюда следует, что R_i находится из следующей цепочки равенств:

$$R = \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx}{\int_{x_i}^{\infty} f(x) dx} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i^{ps}(x) dx = (p_i - p_{i+1}) / p_i, \quad (2.2.14)$$

что, вообще говоря, было ясно с самого начала, поскольку существует явная зависимость (2.2.8) между μ и N , а история нагружения рассматривается пока очень простая. Невзирая на простоту истории нагружения, уравнения (2.2.13–2.2.14) дают основную идею для определения условной вероятности отказа на каждом периоде эксплуатации, если принята врожденная линейная модель накопления повреждений. Истории нагружения с более сложной структурой будут рассмотрены ниже.

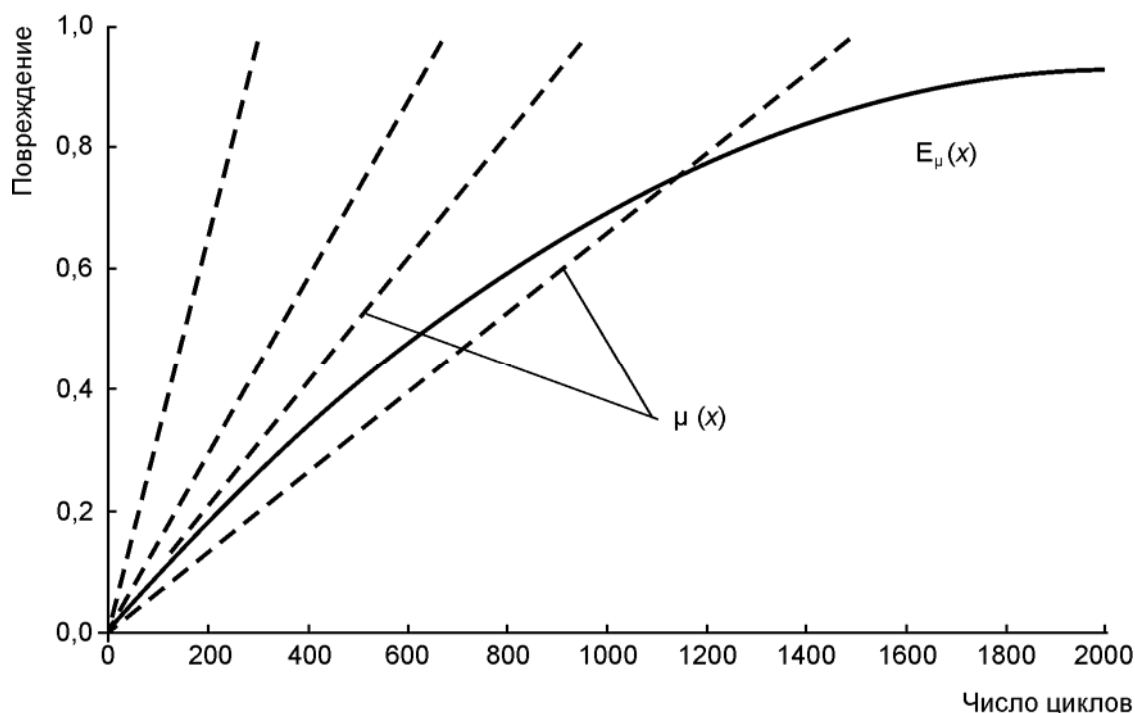


Рис. 2.2.4. Индивидуальные линии накопления повреждений и математическое ожидание процесса накопления повреждений

Дополнительно покажем, что математическое ожидание процесса накопления усталостных моделей при врожденной линейной модели накопления повреждений не является линейной функцией (рис. 2.2.4), что следует из уравнения

$$E\mu(x) \int_0^1 y\varphi(y, x)dy + 1 - \int_0^1 \varphi(y, x)dy.$$

2.2.3. Оптимальное правило остановки при регулярной истории нагружения

Чтобы найти оптимальное правило остановки ненаблюдаемого процесса деградации в элементе МС, требуется знать следующее: историю нагружения, подходящие модели деградации и прогнозирования остаточного ресурса, а также алгоритм нахождения требуемого правила.

Рассмотрим критерий качества эксплуатации – интенсивность затрат в простейшем виде. Пусть цена превентивной остановки составляет c , а цена отказа $(c + d)$, где c и d – константы. Предполагается также, что отказ идентифицируется мгновенно. Для определенности рассмотрим ненаблюдаемый процесс накопления усталостных повреждений, о котором известно, что накопление повреждений происходит по линейному закону, как это описано ранее. Требуется найти правило оптимальной остановки, минимизирующее интенсивность затрат.

Введем следующую последовательность случайных величин:

$$\xi_i = \sum_{j=1}^i \frac{c + d}{x_j} I\{x_{j-1} < N \leq x_j\} + \frac{c}{x_i} I\{N > x_i\}, i = 1, 2, \dots \quad (2.2.15)$$

Случайная величина ξ_i означает, что если произошел отказ на периоде j , то потери станут равными $(c + d)/x_j$. Если же отказа до периода i не произошло, то в результате превентивной остановки потери составят c/x_i . Итак, последовательность (2.2.15) определяет интенсивность затрат при остановке в периоды $i = 1, 2, \dots$. Теперь необходимо найти некоторую оптимальную стратегию остановки эксплуатации. Вообще говоря, стратегий остановки может быть достаточно много. Например, в каждый момент x_i , если элемент не отказал, можно решать, произвести остановку или продолжить эксплуатацию до следующего момента x_{i+1} . Другой пример: можно ничего не решать в каждый момент возможного принятия решения об остановке, а просто прийти в некоторый момент x_i и произвести остановку и т. п. Таким образом, требуется такая поста-

новка задачи, из решения которой была бы найдена оптимальная стратегия остановки последовательности (2.2.15).

Чтобы найти оптимальное правило остановки, требуется ввести более формальный подход. Пусть дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, (ξ_i, \mathfrak{F}_i) , $i = 1, 2, \dots$ – интегрируемая стохастическая последовательность, где ξ_i – последовательность случайных величин, \mathfrak{F}_i – последовательность σ -алгебр такая, что $\mathfrak{F}_i \subset \mathfrak{F}_{i+1} \subset \mathfrak{F}$.

Известно также, что ξ_i измерима относительно \mathfrak{F}_i и $E\xi_i$ существует, причем $-\infty \leq E\xi_i \leq \infty$.

\mathfrak{F}_i имеет смысл совокупности всех возможных событий, которые могут произойти до момента x_i (в частности, события, обозначенные в (2.2.15) в фигурных скобках, входят в данную σ -алгебру). Измеримость же ξ_i по \mathfrak{F}_i , грубо говоря, означает, что к моменту x_i точно известно, произошел отказ или нет.

Правило остановки, или Марковский момент остановки, есть дискретная случайная величина τ такая, что для каждого i выполняется условие

$$\{\tau < i\} \in \mathfrak{F}_i, \text{ кроме того, } P\{\tau < \infty\} = 1. \quad (2.2.16)$$

Эти условия означают, что τ измерима по \mathfrak{F}_i и ограничена по величине с вероятностью 1.

Теперь можно сформулировать оптимизационную задачу в следующем виде. Требуется найти правило остановки, для которого выполнялось бы условие

$$E\xi_{\tau^*} = \inf_{\tau} E\xi_{\tau}, \quad (2.2.17)$$

где инфимум находится по всем правилам остановки, задаваемым условием (2.2.16). Чтобы привести к стандартной постановке задачи поиска оптимального правила остановки, преобразуем (2.2.17) к виду

$$E\xi_{\tau^*} = \sup_{\tau} (-E\xi_{\tau}). \quad (2.2.18)$$

Существует естественный претендент на оптимальный момент остановки, так называемый монотонный случай, когда стохастическая последовательность (ξ_i, \mathfrak{F}_i) удовлетворяет условию

$$\forall i \{E(\xi_{i+1} | \mathfrak{F}_i) \geq \xi_i\} \Rightarrow \{E(\xi_{i+2} | \mathfrak{F}_{i+1}) \geq \xi_{i+1}\}, \quad (2.2.19)$$

где $E(\xi_i | \mathfrak{F}_i)$ – условное математическое ожидание случайной величины ξ_{i+1} относительно \mathfrak{F}_i [64].

Также должно быть выполнено еще одно условие, чтобы в этой последовательности не было очень больших выбросов до момента τ^* :

$$\liminf_i \int_{\{\tau^* < i\}} \xi_i^+ dP = 0, \text{ где } \xi_i^+ = \max(\xi_i, 0). \quad (2.2.20)$$

На практике последнее условие действительно выполняется, поскольку, если даже в последовательности вдруг и окажется такой выброс, то вероятность его крайне мала и при интегрировании в (2.2.20) это значение будет нивелировано соответствующей инфинитезимальной вероятностью при $i \rightarrow \infty$.

Если условия (2.2.19–2.2.20) выполнены, то оптимальное правило остановки стохастической последовательности формулируется следующим образом:

$$\tau^* = \{\text{наименьшее положительное целое } i \text{ такое, что} \\ E(\xi_{i+1} | \mathfrak{F}_i) \geq \xi_i\}. \quad (2.2.21)$$

Продemonстрируем, как это правило может быть использовано в описываемом случае с накоплением усталостных повреждений по линейному правилу и регулярной историей нагружения. Представим последовательность ξ_i в следующем виде:

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \frac{c+d}{x_{i+1}} I\{x_i < N \leq x_{i+1}\} + \frac{c}{x_{i+1}} I\{N > x_{i+1}\} - \frac{c}{x_i} I\{N > x_i\}.$$

Тогда в соответствии с правилами вычисления условных математических ожиданий получим равенство

$$E(\xi_{i+1} | \mathfrak{F}_i) = \xi_i + \left[\frac{c+d}{x_{i+1}} P\{x_i < N \leq x_{i+1}\} + \frac{c}{x_{i+1}} P\{N > x_{i+1}\} - \frac{c}{x_i} P\{N > x_i\} \right] \frac{I\{N > x_i\}}{P\{N > x_i\}}.$$

Из этого следует, что

$$E(\xi_{i+1} | \mathfrak{F}_i) \geq \xi_i \Leftrightarrow R_i = \frac{P\{x_i < N \leq x_{i+1}\}}{P\{N > x_i\}} \geq \frac{c}{di}.$$

Правило оптимальной остановки принимает вид

$$\tau^* = \{\text{наименьшее положительное целое } i \text{ такое, что } R_i \geq \frac{c}{di}\}, \quad (2.2.22)$$

т. е. как только условная вероятность отказа на i -м шаге превысит величину c/di , следует произвести остановку (остановить эксплуатацию). Нахождение оптимального правила иллюстрирует рис. 2.2.5, относящийся к примеру, рассмотренному ниже.

Ясно, что условие монотонности (2.2.19) здесь выполняется, поскольку условная вероятность отказа на каждом шаге может только увеличиваться для деградирующих элементов, а функция c/di может только убывать. Поэтому можно утверждать, что в данном монотонном случае правило (2.2.22) действительно определяет оптимальный момент остановки. Таким образом, в данном случае нет необходимости каждый раз вычислять условную вероятность, а достаточно воспользоваться уравнением (2.2.14), т. е. уметь лишь прогнозировать остаточный ресурс. Если же история нагружения представлена более сложным нерегулярным вариантом, то потребуется более сложная процедура для вычисления R_i , но все равно главная задача будет состоять в умении прогнозировать остаточный ресурс изучаемого элемента. Предлагаемое правило оптимальной остановки выгодно отличается от традиционных методов остановок в задачах технического обслуживания тем, что его можно применять безбоязненно к элементу, эксплуатируемому один раз, до первого отказа. Требования о большом количестве замен и использовании асимптотических методов, чтобы правила начали работать, снимаются. При использовании же теории непрерывных мартингалов [89] возможно расширение предложенного правила до задач с непрерывным временем. Полученное выше правило оптимальной остановки в задачах технического обслуживания носит название леммы Дуба [27] и выводится несколько отличным путем от предложенного В. В. Болотиным [8].

Иллюстративный пример. Предположим, что МС имеет критический элемент, подверженный усталостному накоплению повреждений, и пусть пока приложенная история нагружения является регулярной. До того как использовать систему оптимальной эксплуатации, считаем, что были проведены все необходимые усталостные эксперименты и об этом элементе известно, что при данной истории нагружения его ресурс описывается логнормальным распределением с параметрами среднее $m_l = 3$ и стандартное отклонение $s_l = 0,3$. Теперь все необходимые значения функций из уравнений (2.2.6, 2.2.9, 2.2.10, 2.2.14) могут быть вычислены. Отметим также, что рис. 2.2.1, 2.2.3, 2.2.5 построены для данного логнормального распределения ресурса. Предположим, что остановку можно производить через каж-

дые 100 циклов нагружения. Оптимальные значения момента остановки для трех комбинаций цен приведены на рис. 2.2.5 (это точки пересечения кривой функции R_i с функциями c/di).

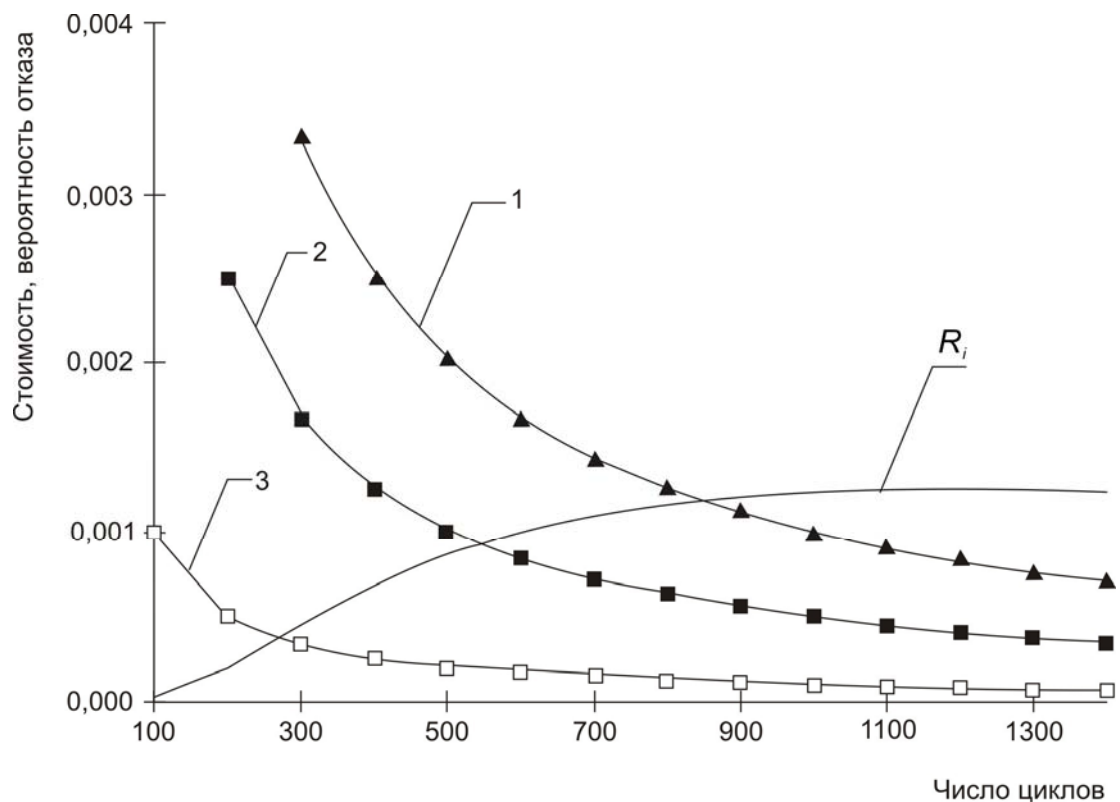


Рис. 2.2.5. Оптимальные моменты остановки τ^* для различных соотношений c/d и функция R_i :
 1 — $c/d = 0,001i$; 2 — $c/d = 0,005i$; 3 — $c/d = 0,01i$

Использованное логнормальное распределение имеет одну неприятную черту для предложенного оптимального правила остановки: правый конец кривой R_i загибается вниз по мере увеличения числа циклов. Вообще, правило (2.2.22) не должно было бы обеспечивать оптимальность момента остановки в данном случае. Чтобы было выполнено основное условие монотонности, распределение ресурса должно определяться неубывающей функцией интенсивности отказов, и только тогда можно корректно пользоваться правилом (2.2.22). Если же строгость рассуждений ослабить, как это и было сделано в данном случае, то правило можно сначала попробовать применить и посмотреть, что из этого получится.

Если же на некотором интервале интенсивность отказов монотонно не убывает и оптимальный момент остановки на этом интервале уже найден, то можно считать, что задача решена, хотя и не совсем корректно.

2.2.4. Оптимальное правило остановки при нерегулярной истории нагружения

Перейдем к решению задачи оптимальной остановки эксплуатации элемента МС, подверженного воздействию нерегулярного нагружения и накапливающего усталостные повреждения по линейному закону. Схема решения задачи подобна изложенной выше. Для нахождения распределений остаточного ресурса достаточно накапливать на каждом периоде информацию о нагружении в виде условных гистограмм амплитуд циклов нагружения $g_i(x)$ и числе циклов k_i за период. Примем, что для каждого образца существует индивидуальная кривая усталости $N(s)$, где $N(s)$ имеет смысл ресурса образца при нагружении его до отказа с постоянной амплитудой нагружения s . Тогда накопленное повреждение за период i определяется как

$$\mu_i = k_i \int_0^{\infty} \frac{g_i(s)}{N(s)} ds. \quad (2.2.23)$$

Стратегию эксплуатации такой МС можно описать следующим образом. Система мониторинга отслеживает историю нагружения. К концу каждого периода нагружения формируется апостериорная (реально осуществившаяся) гистограмма амплитуд нагружения и подсчитывается число циклов. Затем производится оценка накопленного повреждения по (2.2.23) (или какой-либо другой модели деградации). Кроме того, вырабатывается гипотеза о будущем нагружении и для линейного правила формируется априорная гистограмма амплитуд и прогнозируется число циклов. Функционал качества (2.2.17) и правило оптимальной остановки (2.2.22) остаются такими же, как было рассмотрено ранее. Наиболее сложным является вычисление условных вероятностей отказа R_i – ранее нам не требовалось в явном виде вычисление вероятностей от накопленных повреждений, а достаточно было иметь только распределение ресурса. Сейчас же R_i можно представить через накопленные повреждения:

$$R_i = P \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j^{ps} + \mu_i^{pr} = 1 \mid \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j^{ps} < 1 \right\},$$

где верхние индексы опять обозначают апостериорные и априорные величины. Разница между μ_j^{ps} и μ_i^{pr} состоит в том, что первая величина – это действительно накопленное повреждение на периоде j , а вторая – это про-

гнозируемое повреждение на период i . Правило определения R_i было ранее представлено выражением (2.2.12), которое в данном случае преобразуется в

$$R_i = \frac{P_i^{pr}}{P_{i-1}^{ps}} = \frac{P\left\{\sum_{j=1}^{i-1} \mu_j^{ps} + \mu_i^{pr} = 1\right\}}{P\left\{\sum_{j=1}^{i-1} \mu_j^{ps} < 1\right\}}. \quad (2.2.24)$$

Проблема с монотонностью последовательности R_i здесь также остается, но, по-видимому, для каждой конкретной задачи в процессе вычислений этих вероятностей следует просто обращать внимание на то, чтобы данная функция была неубывающей в исследуемом интервале времени. В подавляющем большинстве случаев это условие выполняется, что вполне соответствует «стареющим» моделям надежности МС [8, 17, 44], но возможны экзотические случаи, как это отмечено в параграфе 2.1.4. Для вычисления условной вероятности отказа требуется использовать вычислительную технику непосредственно в процессе эксплуатации. Рассмотрим иллюстративный пример.

Иллюстративный пример. Пусть элемент МС подвергается стационарному случайному нагружению, у которого расположение экстремумов на положительной полуоси описывается χ -распределением Пирсона

$$p(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{\sigma_s^\alpha 2^{\frac{\alpha-2}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right). \quad (2.2.25)$$

При $\alpha = 1$ распределение (2.2.25) становится полунормальным, а при $\alpha = 2$ имеем распределение Рэлея.

Пусть кривые усталости заданы параметрически в двойных логарифмических координатах:

$$N(s) = N_0(s_R/s)^m, \quad (2.2.26)$$

причем предел выносливости s_R имеет распределение Вейбулла в виде

$$F(x) = 1 - \exp(-x/c)^b. \quad (2.2.27)$$

Единичное повреждение можно записать, используя выражения (2.2.25–2.2.27), в следующем виде [9]:

$$\mu = (\sigma_x / s_R)^m [\varphi(m + \alpha) / \varphi(\alpha)] P_{m+\alpha}(s_R^2 / \sigma_x^2),$$

где $\varphi(\alpha) = 2[(\alpha - 2)/2] \Gamma(\alpha/2)$, а $P_{m+\alpha}(s_R^2 / \sigma_x^2)$ – распределение Пирсона.

Длительность периодов эксплуатации примем $\Delta x = 1/4$ года. Предполагая, что процесс нагружения стационарный и эргодичный, и считая, что число циклов нагружения за период нагружения достаточно велико, можно принять, что априорное и апостериорное распределение амплитуд циклов равны распределению (2.2.25), и свести задачу отслеживания процесса нагружения к простому подсчету числа циклов нагружения. Поскольку в каждый период эксплуатации реализуется большое число циклов, то необходимо ориентироваться на центральную предельную теорему. В этом случае распределение числа циклов на i -м периоде будет сходиться к нормальному с математическим ожиданием $m_k \Delta x$ и дисперсией $\sigma_k^2 \Delta x$ (m_k и σ_k^2 – соответственно, среднее число и дисперсия числа экстремумов в единицу времени) [84].

Таким образом, накопленное повреждение за i -й период выражается формулой

$$\mu_i = k_i \frac{\sigma_x^m \varphi(m + \alpha)}{\varphi(\alpha)} \frac{P_{m+\alpha}(s_R^2 / \sigma_x^2)}{s_R^m}. \quad (2.2.28)$$

Зная распределение (2.2.27) случайной величины s_R и измеряя реализующиеся на каждом отрезке эксплуатации значения k_i , можно найти распределение накопленного повреждения (2.2.28) и значения R_i . Чтобы найти правило оптимальной остановки, необходимо задать следующие три группы величин: 1) параметры нагружения σ_k , m_k , σ_x , α ; 2) свойства элемента МС m , N_0 , b , c ; 3) отношение стоимостей c/d .

Пусть 1) $\sigma_k^2 \Delta x = 10^5 \cdot \text{цикла}^2$, $m_k \Delta x = 5 \cdot 10^5 \cdot \text{цикла}$, $\sigma_x = 129$ МПа, $\alpha = 1,2$; 2) $m = 8,12$, $N_0 = 2 \cdot 10^6$, $b = 4$, $c = 200$ МПа; 3) $c/d = 1$; 0,1; 0,01. Задача решалась моделированием на вычислительной машине. По заданным значениям параметров распределений моделировались методом Монте-Карло реализации случайных величин k_i и s_R , которые затем использовались для конструирования априорных и апостериорных распределений накопленного повреждения μ_i и вычисления условной вероятности R_i на каждом шаге эксплуатации.

Результаты решения представлены на рис. 2.2.6. Абсцисса точки пересечения кривой снижения предельно допустимой из условий задачи вероятности отказа с кривой роста условной вероятности отказа позволяет определить правило оптимальной остановки. Видно, что с ухудшением эксплуатационных свойств конструкции (увеличением параметра m и ужесточением нагрузки) и ростом параметра α время оптимальной остановки уменьшается. Причем оно более чувствительно к параметру α .

Еще более чувствительно правило оптимальной остановки к отношению стоимостей c/d . Время остановки уменьшается в 2,44 раза ($m = 12$, $\alpha = 2$) – 2,6 раза ($m = 8$, $\alpha = 1$) при $c/d = 0,1$ и в 3,66 раза при $c/d = 0,01$ по сравнению со случаем, когда $c/d = 1$. При индивидуальном прогнозировании числа циклов нагружения разброс времени оптимальной остановки может составлять 6 % и более (см. рис. 2.2.6).

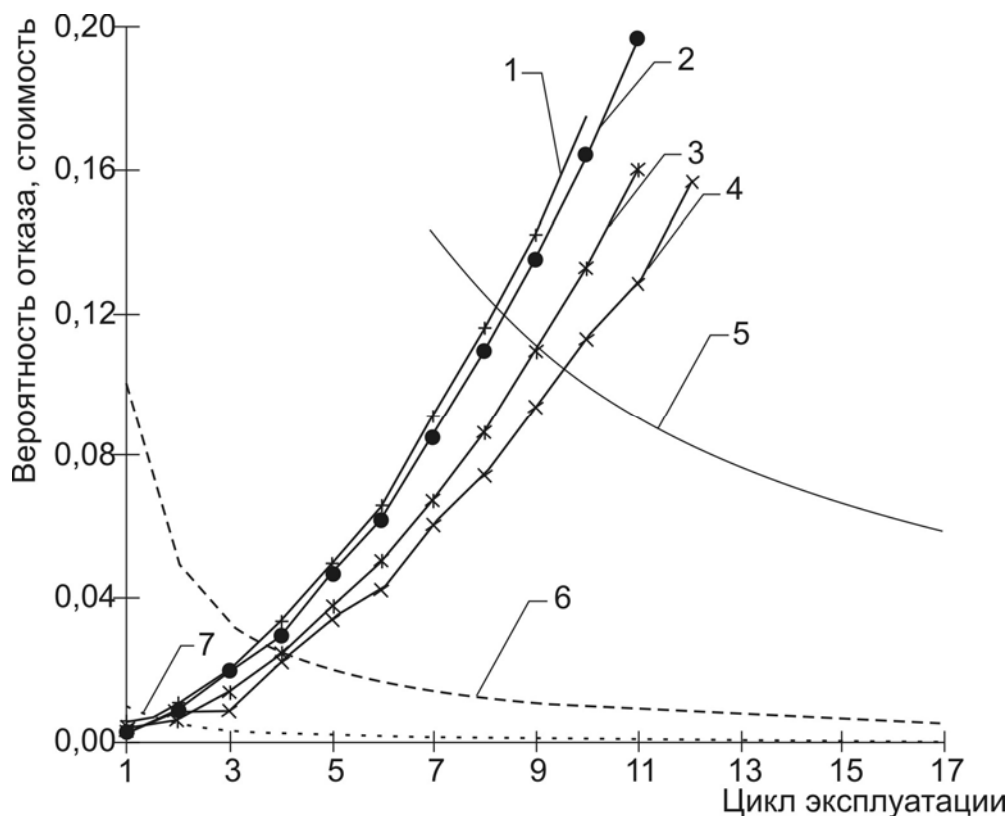


Рис. 2.2.6. Симуляция правила остановки:

1 – $m = 8$, $\alpha = 1$; 2 – $m = 12$, $\alpha = 1$; 3 – $m = 8$, $\alpha = 2$; 4 – $m = 12$, $\alpha = 2$; 5 – функция $1/n$; 6 – функция $0,1/n$; 7 – функция $0,01/n$

Данный параграф дает основное представление о методах построения оптимальных стратегий управления ненаблюдаемыми процессами деградации. Снова подчеркнем, что предлагаемый алгоритм оптимальной остановки имеет последовательную структуру и может быть использован для оборудования, имеющего систему мониторинга нагружения и других внешних воздействий, в результате использования которой возможно оценить накапливаемое повреждение по той или иной модели деградации непосредственно в процессе эксплуатации.

Глава 3. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НАБЛЮДАЕМЫМИ ПРОЦЕССАМИ ДЕГРАДАЦИИ В КЛАССЕ ДВУХУРОВНЕВЫХ ПОЛИТИК

Предположим теперь, что процессы деградации наблюдаемы и есть возможность производить технический мониторинг состояния элементов МС по параметрам процесса деградации. Это может быть отслеживание как непосредственно процесса деградации, так и некоторого ассоциированного с ним процесса, например, сигнала акустоэмиссии. Общую ситуацию с использованием двухуровневых политик управления процессами деградации легко понять на следующих примерах. Пусть имеется элемент, подверженный агрессивному химическому воздействию, защитный слой которого корродирует [78, 80]. При этом есть возможность инструментально следить за изменением толщины слоя и своевременно наносить защитное покрытие. Требуется найти оптимальные значения толщины защитного слоя и толщину слоя, при которой следует производить превентивное восстановление покрытия.

Другой пример. Пусть имеется элемент МС, подверженный усталостному накоплению повреждений и росту трещин. Можно экспериментально подобрать индикатор в виде плоского образца с надрезом [42], который, работая совместно с конструкцией, способен отражать процесс накопления повреждений в эксплуатационном диапазоне нагрузок. Тогда задача будет состоять в том, чтобы по результатам наблюдения за ростом трещины в индикаторе, коррелирующим с накоплением повреждений в элементе, установить оптимальное предельно возможное значение длины этой трещины, при достижении которой следует производить остановку и замену этого элемента. Также можно производить восстановление свойств самого элемента МС: например, появившиеся трещины можно заваривать.

Приведем еще один пример. Известно, что износ режущего инструмента в станках механо- и деревообработки почти линейно связан с возникающей термо-ЭДС пары «резец – деталь» [48]. Поскольку замена инструмента производится многократно, то при такой схеме контроля необходимо установить оптимально допустимое значение напряжения, при достижении которого следует производить замену инструмента.

Таким образом, в приведенных выше примерах имеется либо один, либо два уровня значений процесса деградации, которые следует найти из решения соответствующей оптимизационной задачи. Решение такой зада-

чи также предлагается искать посредством минимизации математического ожидания интенсивности затрат по параметрам политик управления.

Подчеркнем, что уровень деградации, соответствующий отказу изделия (например, максимально допустимая длина трещины), также подлежит оптимизации, поскольку можно сделать дешевое изделие, которое будет часто выходить из строя, и наоборот, вложить необходимые средства и сделать изделие с высокой степенью надежности, которое, может, и не будет окупаться.

Первоначально мы рассмотрим управляемые процессы с возможностями многократного восстановления свойств, что предполагает использование функционалов качества в стационарном режиме типа отношения математических ожиданий. В параграфе 3.3 описывается управление системой однократного действия.

3.1. Полумарковские процессы деградации

Построение моделей оптимального управления процессами деградации элементов МС в данной главе рассматривается как задача управления скачкообразными процессами марковского типа в классе двухуровневых политик. Это название политики достаточно условно и принято по аналогии с задачами управления запасами [65]. Ее сущность состоит в том, что все работы по восстановлению свойств элемента МС связываются с оптимально выбранными из предварительных расчетов состояниями отказа и состоянием процесса, при котором следует производить подачу сигнала о возможном отказе в ближайшем будущем.

3.1.1. Задание процесса деградации

В общем случае поведение деградирующих свойств элементов МС можно описать весьма гибким полумарковским процессом $X(t) = \{x_n, \xi_n, n \geq 0, t \geq 0\}$, где первая компонента x_n – значение процесса $X(t)$ после n -го скачка образует вложенную цепь Маркова и принимает значения в пространстве целых неотрицательных чисел $X = \{0, 1, 2, \dots\}$, а ξ_n – неотрицательные непрерывные случайные величины, задающие интервалы времени между моментами марковского восстановления. Дискретный полумарковский процесс задается полумарковской матрицей

$$\theta_{ij}(t) = P\{x_{n+1} = j, \xi_{n+1} < t | x_n = i\}, i, j \in X,$$

представимой в виде $\theta_{ij}(t) = p_{ij}(t) = p_{ij}F_{ij}(t)$, где $P_{ij} = \theta_{ij}(\infty) = P\{x_{n+1} = j | x_n = i\}$ – вероятности перехода вложенной цепи Маркова, $P_{ij}(t) = P\{\xi_{n+1} < t | x_n = i, x_{n+1} = j\}$ –

функции распределения времени пребывания процесса $X(t)$ в состоянии $x_n = i$ при условии, что $x_{n+1} = j$. В частности, когда $F_{ij}(t)$ представимы в виде $F_{ij}(t) = 1 - \exp(-\lambda_{ij}t)$, соответствующий процесс $X(t)$ будет дискретным марковским процессом, у которого время пребывания в разных состояниях распределено экспоненциально с параметрами λ_{ij} .

3.1.2. Двухуровневые политики управления

Рассмотрим следующий вариант оптимального управления процессом деградации элемента МС. Предположим, что процесс деградации начинается из состояния 0, уровень m соответствует сигнальному уровню, а уровень n – состоянию отказа. Последовательность переходов из одного состояния в другое можно изобразить графически как последовательность переходов с одного уровня на другой. На рис. 3.1.1 изображена возможная реализация управления процессом (стрелка вниз – подача сигнала на восстановление).

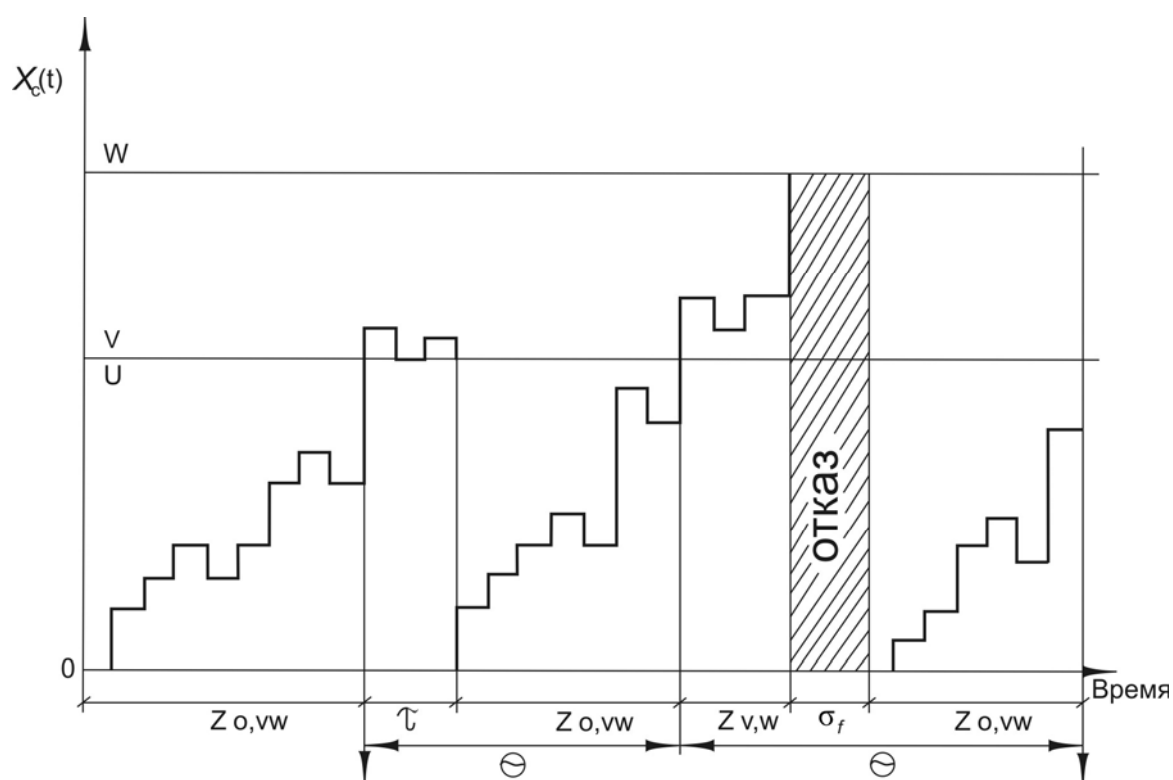


Рис. 3.1.1. Управление полумарковским процессом по принципу двухуровневых политик

Обозначим множества: $U = \{0, 1, \dots, m-1\}$, $V = \{m, \dots, n-1\}$, $W = \{n, \dots\}$. $VW = V \cup W$.

Дополнительно предполагается, что превентивное восстановление происходит мгновенно (в ряде случаев это время не бывает значимым и им в первом приближении можно пренебречь).

Оптимальная политика управления, как и в задачах управления запасами, – ничего не делать до попадания процесса в множество V , так как система функционирует в установленных для нее рамках, и произвести управляющее воздействие как только процесс окажется в этом множестве. Любая политика управления связана с выбором оптимизируемых параметров. Для рассматриваемого способа управления можно выделить три основных варьируемых параметра:

- уровень n , соответствующий основному отказу;
- уровень m подачи сигнала на восстановление;
- величина восстановления Δ .

Очевидно, что мгновенная реакция на сигнал восстановления практически невозможна, поэтому в политику управления вводится запаздывание τ на восстановление после подачи сигнала. Восстановление системы после аварийного отказа также происходит с запаздыванием τ_f . Считаем, что время превентивного и аварийного восстановления имеет конечное математическое ожидание $E\tau < \infty$ и $E\tau_f < \infty$.

Приняты следующие обозначения времени переходов:

$$Z_{i,VW} = \inf\{t, x(t) \in VW | x(0) = i, i \in U\},$$

$$Z_{V,W} = \inf\{t, x(t) \in V | x(0) \in V\}, \quad (3.1.1)$$

$$Z_{i,W} = \inf\{t, x(t) \in W | x(0) = i, i \in UV\}.$$

На рис. 3.1.1 видно, что возможен случай, когда

$$Z_{V,W} = 0, \text{ т. е. } P\{Z_{V,W} = 0\}. \quad (3.1.2)$$

После подачи сигнала произойдет одно из двух событий: либо превентивное восстановление через время τ , либо отказ через время $Z_{V,W}$.

В результате описанной выше процедуры управления происходит преобразование процесса деградации $X(t)$ в управляемый регенерирующий процесс $X_c(t)$. В качестве моментов регенерации рассматриваются моменты восстановления системы, а длительности циклов регенерации $\{\theta_i, i = 1, 2, \dots\}$ образуют рекуррентный процесс восстановления без запаздывания.

В этом параграфе рассматривается лишь полное превентивное восстановление состояния процесса после подачи сигнала на восстановление. Случай неполного восстановления рассматривается в следующем параграфе на примере управления процессом гибели.

3.1.3. Функционал качества

Качество функционирования рассматриваемой системы оценим с помощью математического ожидания интенсивности затрат. При условии, что интенсивность затрат по поддержанию элемента МС на уровне i пропорциональна номеру этого уровня:

$$S(m, n, \Delta) = ((c_0 + c_1 E\tau_f) p_f + d(m, n, \Delta) + c_e EY(\theta)) \cdot (E\theta)^{-1}, \quad (3.1.3)$$

где $EY(\theta)$ – среднее значение интеграла от управляемого процесса деградации $X_c(t)$. Один цикл регенерации θ в стационарном режиме, определяемый процессом накопления

$$Y(t) = \int_0^t f(x_c(t)) dt;$$

p_f – вероятность отказа на одном цикле регенерации;

$E\theta$ – математическое ожидание длительности цикла.

Кроме того, считаем, что известны стоимость отказа c_0 , удельные потери от простоя в единицу времени c_1 , стоимость системы управления $d(m, n, \Delta)$ и коэффициент пропорциональности c_e . Все величины, входящие в (3.1.3), явно или неявно зависят от параметров m, n и Δ .

Оптимизация функционала (3.1.3) по параметрам m, n и Δ позволит найти их оптимальные значения. Таким образом, ставится задача получить алгоритмы, позволяющие вычислять величины $E\tau_c$, $E\theta$ и p_f , входящие в (3.1.3) как функции этих параметров.

Поскольку для каждой отдельной реализации процесса $X_c(t)$ выполняются равенство $Z_{0,V} + Z_{V,W} = Z_{0,W}$ и (3.1.2), то $P\{Z_{0,V} = Z_{0,W}\} > 0$, и, значит, математическое ожидание цикла регенерации можно записать как

$$E\theta = T_{0,VW} + E_{\min}(\tau, Z_{V,W}) + p_f E\tau_f, \quad (3.1.4)$$

где $p_f = P\{Z_{V,W} < \tau\}$;

T с индексами – соответствующее математическое ожидание из (3.1.1).

Следующая задача состоит в нахождении значений величин, входящих в (3.1.4).

3.1.4. Уравнения марковского восстановления

Отметим, что время перехода из состояния $i \in U$ в множество VW совпадает с временем пребывания процесса в множестве U , если в начальный момент времени процесс находился в состоянии $i \in U$. Поэтому для функции распределения времени перехода $Z_{i,VW} = \inf\{t, x(t) \in VW | x(0) = i, i \in U\}$ из состояния i в множество VW можно записать уравнение марковского восстановления [46]:

$$F_{i,VW}(t) - \sum_{j \in U} \int_0^t Q_{i,j}(ds) F_{j,VW}(t-s) = \sum_{j \in VW} Q_{i,j}(t). \quad (3.1.5)$$

Соответственно, для определения математического ожидания перехода $T_{i,VW} = EZ_{i,VW}$ можно записать линейную систему алгебраических уравнений

$$T_{i,VW} - \sum_{j \in U} p_{ij} T_{j,VW} = m_i, \quad i \in U, \quad (3.1.6)$$

где $m_i = E\xi_i$ – математические ожидания времен пребывания процесса $X(t)$ в состоянии i :

$$m_i = \int_0^\infty t dG_i(t), \quad \text{где } G_i(t) = \sum_{j \in X} Q_{i,j}(t) \quad \text{или} \quad m_i = \sum_{j \in X} p_{ij} T_{i,j}. \quad (3.1.7)$$

С помощью этих уравнений можно вычислить $T_{0,VW}$, воспользовавшись (3.1.6).

Введем следующие обозначения: $l_{VW} = \min\{n, n \geq 1, x_n \in VW | x_0 \in U\}$ – момент первого попадания цепи Маркова в множество VW из множества U , $f_{ij} = P\{x_{l_{VW}} = j | x_0 = i\}$ – вероятность того, что в момент первого попадания процесса $X(t)$ в множество VW процесс окажется в состоянии j , если он стартовал из состояния i .

Для вероятностей f_{ij} также можно составить систему линейных алгебраических уравнений

$$f_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in VW} p_{ik} f_{kj}, \quad j \in VW, i \in U \quad (3.1.8)$$

и тем самым получить распределение вероятностей f_{0j} , $j \in VW$, нахождения процесса в состоянии j в момент подачи сигнала на восстановление качества. Следует отметить, что $P\{Z_{VW} = 0\} = \sum_{j \in W} f_{0j}$ – вероятность того, что момент подачи сигнала совпадает в данном случае с моментом отказа элемента.

Поскольку $X(t)$ – полумарковский процесс и $f_{0j}, j \in VW$, являются начальными условиями для нахождения функции распределения $F_{VW}(t) = P\{Z_{VW} < t\}$, используя теорему Жордана о представлении всякого вероятностного распределения в виде смеси атомического и непрерывного распределений [86], найдем

$$F_{VW}(t) = \sum_{i \in V} f_{0i} F_{i,W}(t) + \sum_{j \in W} f_{0j} H(t),$$

где $F_{iW}(t) = P\{Z_{iW} < t\}$, а $H(t)$ – функция Хевисайда.

Для $F_{iW}(t)$ аналогично (3.1.5) существует система уравнений марковского восстановления:

$$F_{i,W}(t) - \sum_{j \in W} \int_0^t Q_{i,j}(ds) F_{j,W}(t-s) = \sum_{j \in W} Q_{i,j}(t), \quad i \in UV, \quad (3.1.5')$$

из решения которой находится $F_{iW}(t)$, а значит, и p_f и $E_{\min}(\tau, Z_{VW})$. Более подробно вопрос о нахождении этих величин исходя из известных распределений рассматривается далее. По найденным значениям данных величин можно найти $E\theta$ как функцию параметров m , n и Δ .

Если бы превентивное восстановление свойств было неполным, то потребовалось бы еще дважды решать уравнения марковского восстановления и дважды применять операцию математического ожидания.

3.1.5. Процесс накопления

Рассмотрим вопрос, связанный с определением $EY(\theta)$. Поскольку $Y(\theta)$ – аддитивный функционал, то можно разбить цикл θ на участки и рассмотреть принимаемые им значения по участкам. Представим $X_c(\theta)$ в виде

$$Y(\theta) = Y(Z_{0,VW} + \min(\tau, Z_{VW}) + \tau_f I(\tau > Z_{VW})) = Y(Z_{0,VW}) + Y(\min(\tau, Z_{VW})).$$

Рассмотрим накопление сначала на участке $[0, Z_{0,VW})$, где $Z_{0,VW}$ – момент первого достижения множества VW , имеющий функцию распределения $F_{0,VW}(t)$, определяемую с помощью уравнения (3.1.5'). Значит, $EY(Z_{0,VW})$ – математическое ожидание площади под траекторией процесса деградации, оканчивающегося в момент попадания в множество VW . Тогда ясно, что все такие траектории можно перегруппировать по принципу принадлежности сигма-алгебре соответствующих событий, при которых процесс $X_c(t)$ достигает этого множества в момент $Z_{0,VW}$. Теперь следует ввести условное математическое ожидание $EY(Z_1(0, VW)|Z_1(0, VW))$ и использовать формулу полной вероятности

$$EY(Z_{0,VW}) = E(EY(Z_{0,VW})|Z_{0,VW}). \quad (3.1.9)$$

Следовательно, надо найти $\alpha_j(t) = E(X(t)|X(0) = j)$, $j \in U$, где t – момент достижения множества VW .

Для этого введем характеристическую функцию

$$\alpha_j(\lambda, t) = E(e^{i\lambda Y(t)}|X(0) = j), \quad (3.1.10)$$

для которой справедливо равенство

$$\alpha_j(t) = \frac{1}{i} \frac{d}{d\lambda} \alpha_j(\lambda, t) | \lambda = 0. \quad (3.1.11)$$

Представим (3.1.10) в виде

$$\alpha_j(\lambda, t) = E \left(e^{i\lambda \left(j\xi_j + \int_{\xi_j}^t x(t) dt \right)} | X(0) = j \right) = \int_0^t \sum_{k \in U} Q_{jk}(ds) \alpha_k(\lambda, t-s), \quad (3.1.12)$$

где ξ_j – время пребывания $X(t)$ на уровне j , имеющее функцию распределения $[(P\{\xi\})_j < t = G_j(t) = \sum_{k \in U} Q_{jk}(t)]$.

Объединяя (3.1.10) с (3.1.11), получаем уравнение марковского восстановления для математического ожидания площади под процессом, достигающим множества VW до момента t :

$$\alpha_j(t) - \int_0^t \sum_{k \in U} Q_{jk}(ds) \alpha_k(\lambda - s) = j \int_0^t G(\gamma) d(\gamma). \quad (3.1.13)$$

Окончательное уравнение для определения $EZ_{0,VW}$ принимает вид

$$EZ_{0,VW} = \int_0^\infty \alpha_0(t) dF_{0,VW}(t). \quad (3.1.14)$$

Для дальнейшего изложения важное значение имеет формула для определения минимума из двух независимых случайных величин, которая выводится посредством условного математического ожидания. Для $\eta = \min(\xi_1, \xi_2)$, имеющих функции распределения $F_1(t)$ и $F_2(t)$, соответственно, справедливы равенство

$$\eta = \xi_1 I(\xi_1 < \xi_2) + \xi_2 I(\xi_2 \leq \xi_1)$$

и равенство для математических ожиданий

$$E\eta = E(E\xi_1 I(\xi_1 < \xi_2) | \xi_2) + E(E(\xi_2 I(\xi_2 \leq \xi_1) | \xi_1)),$$

где $I(A)$ – индикатор некоторого множества A .

Поскольку $[E(\xi)]_1 I(\xi_1 < t)$ по определению равно $\int_0^t dF_1(x)$, то

$$E(E\xi_1 I(\xi_1 < \xi_2) | \xi_2) = \int_0^\infty \left(\int_0^t \times dF_1(x) \right) dF_2(t),$$

и, значит,

$$E\eta = \int_0^\infty \left(\int_0^t \times dF_1(x) \right) dF_2(t) + \int_0^\infty \left(\int_0^t \times dF_2(x) \right) dF_1(t). \quad (3.1.15)$$

С другой стороны, по определению $E\eta$ можно разложить на два слагаемых, первое из которых – $E\eta = E(E\xi_1 | (\xi_1 < \xi_2) | \xi_2) + E(E\xi_2 | (\xi_2 \leq \xi_1) | P\{\xi_2 \leq \xi_1\})$,

где $E\xi_1 | (\xi_1 < \xi_2) = \frac{E(\xi_1 I(\xi_1 < \xi_2))}{P\{\xi_1 < \xi_2\}}$. Второе слагаемое представляется подобным образом.

Найдем математическое ожидание процесса накопления на участке между подачей сигнала на восстановление и самим восстановлением, которое обозначим $EY(\xi)$. Обозначим также за $Y_j(t)$ процесс накопления за время t , если процесс начинался из состояния j в начальный момент времени, и положим по определению $\xi_j = \min(\tau, Z_{j,W})$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\xi = \sum_{j \in V} \xi_j I(l_{VW} = j),$$

$$X_j(\xi_j) = Y_j(Z_{j,W}) I(Z_{j,W} < \tau) + Y_j(\tau) I(Z_{j,W} \geq \tau),$$

$$EY(\xi) = \sum_{j \in W} EY_j(\xi_j) f_{0j}. \quad (3.1.16)$$

Последнее уравнение и определяет искомую величину при известных f_{0j} из уравнения (3.1.8).

Чтобы определить математическое ожидание первого слагаемого из (3.1.16), запишем следующую последовательность равенств для математических ожиданий:

$$E[(Y)_j(Z_{j,VW}) I(Z_{j,VW} < \tau)] = E(E(Y_j(Z_{j,VW}) I(Z_{j,VW} < \tau | \tau))).$$

$$E(Y_j(Z_{j,VW}) I(Z_{j,VW} < \tau | \tau = t)) = E(Y_j(Z_{j,VW}) I(Z_{j,VW} < t)),$$

$$E(Y_j(Z_{j,VW}) I(Z_{j,VW} < t)) = E(E(Y_j(Z_{j,VW}) I(Z_{j,VW} < t) | Z_{j,VW})),$$

$$E(Y_{\downarrow j}(Z_{\downarrow j}, VW) I(Z_{\downarrow j}, VW) < t) | Z_{\downarrow j}, VW = x) = E([Y] j(x) I(x < t)).$$

Соответственно, $E(X_{\downarrow j}(x))$ определяется из системы уравнений (3.1.13):

$$EY_j(Z_{j,VW}) I(Z_{j,VW} < t) = \int_0^{\infty} EY_j(x) I(x < t) dF_{j,VW}(x),$$

значит,

$$EY_j(Z_{j,VW}) I(Z_{j,VW} < t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} EY_j(x) dF_{j,VW}(x) dG_j(t). \quad (3.1.17)$$

Последовательное использование операции математического ожидания логически оправдано, так как $E[Y_j(Z_{j,VW} | Z_{j,VW})]$, как было сказано, есть условное математическое ожидание относительно сигма-алгебры, порожденной разбиением множества всех траекторий движений на семейства траекторий, оканчивающихся к моменту $Z_{j,VW}$. Для нахождения правой части уравнений (3.1.16) уравнение (3.1.13) не пригодно, так как $Y_j(\tau)$ имеет смысл процесса накопления $Y(t)$, «блуждающего» в множестве UV , стартовавшего из состояния $i \in V$, у которого до остановки τ заведомо меньше времени до момента выхода из множества UV . Поэтому следует составить уравнения для $EY_j(\tau)$ по траекториям процесса, находящегося в множестве UV вплоть до момента τ .

Как и прежде, введем характеристическую функцию, но теперь разложим ее на сумму двух функций:

$$\alpha_j(\lambda, t) = E(e^{i\lambda Y_j(t)} I\{\xi_j \geq t\} | X(0) = j) + (e^{i\lambda Y_j(t)} I\{\xi_j < t\} | X(0) = j),$$

откуда получим уравнение для $EX_j(t)$:

$$EY_j(t) - \sum_{k \in UV} [Q_{jk}(ds) EY_k(t-s)] = j[t \sum_{k \neq j} Q_{jk}(t) + \int_0^t u \sum_{k \neq j} Q_{jk}(du)]. \quad (3.1.18)$$

А значит, можно аналогично процедуре (3.1.16) – (3.1.17) найти

$$E(Y_j(\tau) I(\tau < Z_{j,W})) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^t EY_j(x) dG(x) dF_{j,W}(t) \right).$$

Предлагаемая процедура поиска значений (3.1.16) «в лоб» весьма громоздка, требуется неоднократное решение уравнений марковского восстановления. Чтобы найти математическое ожидание процесса накопления

на траектории процесса $Y(\theta)$ за один цикл регенерации, можно поступить и по-другому. А именно, ввести понятие накопленного времени пребывания процесса в состоянии j до выхода из множества U или UV , найти их математические ожидания из соответствующих уравнений восстановления и проинтегрировать по всему пространству состояний. Надо отметить, что хотя этот способ и будет применен в следующем параграфе как весьма прозрачный, но он опять-таки требует последовательного решения уравнений восстановления, что для полумарковских, в общем случае, немонотонных процессов представляется весьма непростой процедурой.

Рассмотрим третий способ нахождения $EY(\theta)$. В силу того, что $X_c(t)$ является регенерирующим процессом, справедливо следующее равенство по теореме Смита [38, 70]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Y(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{EY(t)}{t} = \frac{EY(\theta)}{E\theta} = \lim_{t \rightarrow \infty} EX(t).$$

С другой стороны,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} EX(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k \in UV} P\{X(t) = k\} = \frac{1}{E\theta} \sum_{k \in UV} \int_0^{\infty} P\{X(t) = k, t < \theta\} dt.$$

Следовательно,

$$EY(\theta) = \sum_{k \in UV} \int_0^{\infty} P\{X(t) = k, t < \theta\} dt.$$

Поскольку процесс $X(t)$ обладает полумарковским свойством, то регенерирующий процесс $X_c(t)$ можно представить как последовательную независимую сумму двух регенерирующих процессов с временем регенерации $Z_1 = Z_{0,UV}$ и $Z_2 = \min(\tau, Z_{UV})$ соответственно. Следовательно,

$$EY(\theta) = E \int_0^{Z_1} X(t) dt + E \int_0^{Z_2} X(t) dt,$$

а значит,

$$EY(\theta) = \sum_{k \in U} k \int_0^{\infty} P\{X(t) = k, t < Z_1 \mid X(0) = 0\} + k \int_0^{\infty} P\{X(t) = k, t < Z_2 \mid X(0) \in V\}.$$

Обозначим за $R_{ij}(t) = P\{X(t) = j \mid X(0) = i\}$ условную вероятность нахождения процесса в состоянии j в момент времени t , если в начальный мо-

мент времени процесс находился в состоянии i . Для этой вероятности составляется следующее уравнение:

$$R_{ij}(t) = \delta_{ij} \bar{G}_i(t) + \sum_{k \in X} \int_0^t Q_{ik}(t-s) R_{kj}(t-s) ds, \quad i, j \in X, \quad (3.1.19)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера;

$\bar{G}_i(t)$ – вероятность того, что процесс не покинет состояние i до момента t .

В случае, если необходимо найти вероятность пребывания процесса в состоянии k в момент t , если до этого момента не было выхода, например, из области U , то вводится поглощающий экран на уровне m , что приведет к соответствующим изменениям вложенной цепи Маркова, и суммирование в (3.1.19) будет производиться уже только по множеству U . Далее для процесса гибели эта процедура рассматривается более подробно.

Обозначим за $X(t)$ процесс с поглощением. Тогда

$$P\{X(t) = k, t < Z_1\} = P\{\bar{X}(t) = k\}, \quad (3.1.20)$$

где правая часть равенства находится из соответствующих уравнений (3.1.17) по множеству U . Кроме того, требуется найти $P\{X(t) = k, t < \tau\}$, где τ – независимый от процесса $X(t)$ марковский момент остановки, для которого справедливо равенство

$$P\{X(t) = k, t < \tau\} = P\{X(t) = k\} P\{t < \tau\}.$$

Наконец, чтобы найти формулу, аналогичную (3.1.20), для Z_2 , вспомним, что событие $Z_2 > t$ эквивалентно произведению событий $\{Z_{VW} > t\}$ и $\{\tau > t\}$, и, следовательно, справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} P\{X(t) = k, t < Z_2\} &= P\{X(t) = k, Z_{U,W} > t, \tau > t\} = \\ &= P\{X(t) = k, Z_{V,W} > t | \tau > t\} P\{\tau > t\} = P\{X(t) = k | Z_{V,W} > t\} P\{\tau > t\} = \\ &= P\{\bar{X}(t) = k\} P\{\tau > t\}. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Итак, используя (3.1.18–3.1.21), получим математическое ожидание $EY(\theta)$.

Изложенные в этом параграфе результаты и предложенные уравнения марковского восстановления для нахождения величин, входящих в функционал качества, как функций параметров двухуровневой политики

управления позволяют при отыскании минимума (3.1.3) получать их оптимальные значения как у обычной дискретной функции. Для отыскания минимума функции нескольких переменных можно использовать как методы дискретной оптимизации, так и процедуры простого перебора при небольших значениях дискретизации пространства состояний процесса деградации.

В заключение отметим, что эти результаты имеют, скорее, теоретический характер, поскольку построение общих полумарковских моделей оптимального управления процессами деградации в классе двухуровневых политик ограничено возможностями построения собственно статистических моделей определения параметров процессов, а также вычислительными трудностями решения уравнений марковского восстановления. Однако для частных вариантов рассматриваемых далее моделей управления есть возможность получить законченные и достаточно простые алгоритмы.

3.2. Процесс гибели

Предположим, что процесс деградации элемента МС описывается в частном случае марковским процессом гибели $\{X(t), t \geq 0\}$ с конечным множеством состояний $X = \{0, 1, \dots, m, n\}$, у которого вероятность перехода из состояния в состояние задается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dP_n(t)}{dt} = -\mu_n P_n(t) \\ \frac{dP_k(t)}{dt} = -\mu_k P_k(t) + \mu_{k+1} P_{k+1}(t), k = 1, \dots, n-1, \\ \frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1 P_1(t) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

где $P_i(t) = P\{X(t) = i | X(0) = i_0\}$, $i \geq i_0$, $i = 0, \dots, n$;

μ_i – инфинитезимальные параметры,
а начальные условия

$$P_i(0) = \begin{cases} 1, & i = i_0 \\ 0, & i \neq i_0 \end{cases}. \quad (3.2.2)$$

Введенный марковский процесс гибели является монотонным и убывает из оптимизируемого состояния n до состояния отказа 0. Управление таким процессом деградации осуществим с помощью двухуровневой по-

литики управления. Возможные реализации двух типов циклов регенерации управляемого процесса $\{X_c(t), t \geq 0\}$ изображены на рис. 3.2.1 (стрелки вниз – подача сигнала предупреждения). В отличие от предыдущего варианта считаем, что возможно неполное восстановление свойств элемента, которое охарактеризуем величиной Δ . Чтобы исключить вырожденный случай, предположим, что $\Delta > m$ и, кроме того, $\Delta = n - m$. Последнее предположение не является принципиальным и нужно лишь для уменьшения числа переменных с трех до двух при решении задачи оптимизации функционала качества (3.1.3).

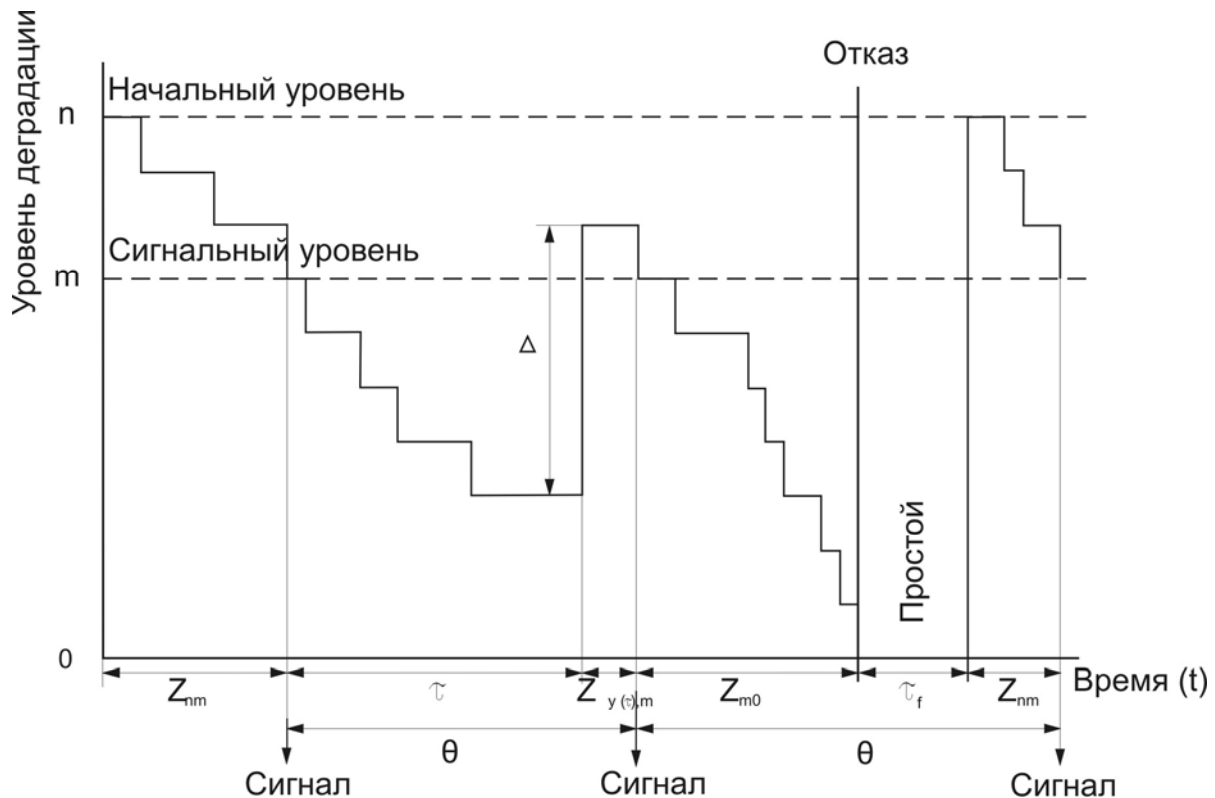


Рис. 3.2.1. Возможные варианты реализации двух типов циклов регенерации управляемого процесса гибели

3.2.1. Вычисление характеристик функционала стоимости

Запишем математическое ожидание длительности цикла регенерации $E\theta$ процесса в следующем виде:

$$E\theta = E\min(\tau, Z_{m,0}) + P\{Z_{m,0} \leq \tau\}(E\tau_f + T_{n,m}) + \{Z_{m,0} > \tau\}T_{y,m},$$

где $T_{y,m}$ — математическое ожидание времени перехода со случайного уровня y после превентивного восстановления на уровень m .

Для нахождения математического ожидания интенсивности затрат (3.1.3) в стационарном режиме как функции параметров m и n необходимо получить соответствующие формулы и алгоритмы, позволяющие выразить

$E\min(\tau, Z_{m,0}), P\{Z_{m,0} \leq \tau\}, T_{n,m}, T_{y,m}, E \int_0^{\theta} f(X_c(t))dt$ через эти параметры.

1. Обозначим $\xi_k, k = 1, \dots, n$, время пребывания процесса на уровне k . Так как $X(t)$ – марковский процесс гибели, то ξ_k имеют экспоненциальные функции распределения $L_k = \exp(-\mu_k t)$ и математические ожидания $E\xi_k = 1 / \mu_k$. Тогда математическое ожидание $T_{k_0,k}$ времени перехода из состояния k_0 в состояние k будет

$$T_{k_0,k} = \sum_{i=k+1}^{k_0} 1/\mu_i.$$

Следовательно, $T_{n,m} = \sum_{i=m+1}^n 1/\mu_i$.

2. Обозначим функцию распределения времени перехода $F_{m,0}(t) = P\{Z_{m,0} < t\}$, которая находится из решения системы уравнений (3.2.1) с начальными условиями (3.2.2), где в качестве k взято m , $\mu_{m+1} = 0$ и $\mu_0 = 0$, т. е. соответствует условиям, что процесс начинается из состояния m , а состояние 0 – поглощающее. Таким образом, нас интересует распределение момента первого попадания в состояние 0 из состояния m , а не вероятность того, что процесс $X(t)$ находится в состоянии 0 в момент времени t . Следуя рекомендациям Б. В. Гнеденко [15] и применяя преобразование Лапласа, найдем

$$F_{m,0}(t) = 1 - \mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_m \sum_{i=1}^m \frac{\exp(-\mu_i t)}{\mu_i \omega'(-\mu_i)} = 1 - \mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_m \sum_{i=1}^m \frac{\exp(-\mu_i t)}{\mu_i \omega'(-\mu_i)},$$

где $\omega(x) = (x + \mu_1) \dots (x + \mu_m)$.

Вероятность отказа на одном цикле регенерации p_f определяется с помощью интеграла вида

$$p_f = P\{Z_{m,0} \leq \tau\} = P\{Z_{m,0} \leq \tau\} = \int_0^{\infty} F_{m,0}(t) dG(t).$$

Если $G(t)$ – экспоненциальная функция распределения с параметром ν , то вероятность отказа на одном цикле регенерации будет

$$p_f = \mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_m \sum_{i=1}^m \frac{\nu}{(\nu + \mu_i) \mu_i \omega'(-\mu_i)}. \quad (3.2.3)$$

Аналогичную процедуру можно применить и для нахождения

$$P_k(t) = P\{X(t) = k | X(0) = m\}. \quad (3.2.4)$$

Разница между (3.2.4) и $P\{Z_{m,k} > t\}$ состоит в том, что в первом случае k не является поглощающим состоянием, а во втором случае является, т. е. $\mu_k = 0$.

Вероятность пребывания процесса $X(t)$ на уровне k в момент времени t , если $X(t)$ стартовал с уровня m , –

$$P_k(t) = \mu_{k+1} \cdot \dots \cdot \mu_m \sum_{i=k+1}^m \frac{\exp(-\mu_i t)}{\mu_i \omega'_{k+1}(-\mu_i)},$$

где $\omega_{k+1}(x) = (x + \mu_{k+1}) \dots (x + \mu_m)$.

3. Определим $T_{y,m} = ET_{y(\tau),m}$, где $T_{y(\tau),m}$ – условное математическое ожидание времени перехода процесса со случайного уровня $y(\tau)$, на который попадает процесс $X_c(t)$ после превентивного восстановления состояния, на уровень m . Для $T_{y(\tau),m}$ справедливо $T_{y(\tau),m} = E(Z_{y(\tau),m} | \tau)$. Следовательно, $T_{y(\tau),m} = \sum_{i=\Delta+1}^n T_{i,m} P_{i-\Delta}(\tau)$.

Тогда $T_{y,m} = \int_0^\infty T_{y(t),m} dG(t)$, и если $G(t)$ – экспоненциальная функция с параметром ν , то

$$T_{y,m} = \sum_{i=\Delta+1}^n T_{i,m} \sum_{j=i-\Delta}^m \frac{\nu \mu_{i-\Delta+1} \cdot \dots \cdot \mu_m}{(\nu + \mu_j) \mu_j \omega'(-\mu_j)}. \quad (3.2.5)$$

4. Математическое ожидание минимума из двух случайных величин определяется с помощью интеграла

$$E \min(\tau, Z_{m,0}) = \int_0^\infty (1 - G(t))(1 - F_{m,0}(t)) dt.$$

Если $G(t)$ – экспоненциальная функция с параметром ν , то

$$E \min(\tau, Z_{m,0}) = \sum_{i=1}^m \frac{\mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_m}{(\nu + \mu_i) \mu_i \omega'(-\mu_i)}.$$

5. Если считать, что затраты на поддержание системы на уровне линейно зависят от этого уровня, то нахождение $E \int_0^\theta f(X_c(t)) dt$ сводится к нахождению математического ожидания процесса EX_c на одном цикле реге-

нерации. Введем $\mathcal{G}_k, k = 0, \dots, n$, – случайный интервал времени из цикла θ , на котором $X(t) = k$. В этом случае математическое ожидание процесса EX_c в стационарном режиме определяется как

$$EX_c = \sum_{k=0}^n \frac{kE\mathcal{G}_k}{E\theta}.$$

Чтобы найти $E\mathcal{G}_k$, запишем соотношения для \mathcal{G}_k и применим операцию математического ожидания. Очевидно, что

$$\mathcal{G}_0 = \tau_f I\{\tau \geq Z_{m,0}\},$$

$$\mathcal{G}_{m-i} = \min[\xi_{m-i}, (\tau - Z_{m,m-i-1})^+], \quad i = 0, \dots, m-1,$$

$$\mathcal{G}_{n-i} = \xi_{n-i} [I\{\tau \geq Z_{m,0}\} + I\{\tau < Z_{m,m-i-1}\}], \quad i = 0, \dots, m-2,$$

$$\mathcal{G}_i = \xi_i, \quad i = m+1, \dots, \Delta+1.$$

Так как $u^+ = \max(0, u)$, и если ξ_1 и ξ_2 – случайные величины с распределениями $F_1(t)$ и $F_2(t)$, то

$$P\{(\xi_1 - \xi_2)^+ > u\} = \int_0^\infty F_2(x) dF_1(u+x), \quad P\{\min(\xi_1, \xi_2) > u\} = 1 - (1 - F_1(u))(1 - F_2(u)).$$

Тогда математические ожидания от этих случайных величин примут следующий вид:

$$E\mathcal{G}_0 = p_f E\tau_f,$$

$$E\mathcal{G}_{m-i} = \frac{1}{\nu + \mu_{m-i}} \left(1 - \mu_{m-i} \cdot \dots \cdot \mu_m \sum_{k=m-i}^m \frac{\nu}{(\nu + \mu_k) \mu_k \omega'_{m-i}(-\mu_k)} \right), \quad i = 0, \dots, m-1,$$

$$E\mathcal{G}_{n-i} = \frac{1}{\mu_{n-i}} \left(p_f + \sum_{k=m-i}^m \frac{\nu \mu_{m-i} \cdot \dots \cdot \mu_m}{(\nu + \mu_k) \mu_k \omega'_{m-i}(-\mu_k)} \right), \quad i = 0, \dots, m-2,$$

$$E\mathcal{G}_i = \frac{1}{\mu_i}, \quad i = m+1, \dots, \Delta+1.$$

Здесь также было сделано предположение об экспоненциальности времени превентивного восстановления. Это предположение существенно лишь в том, что оно позволяет вычислять в явном виде функционал качества управления (3.1.3). В реальных условиях эксплуатации при соответствующей

ших статистических исследованиях функция распределения $G(t)$ может не иметь экспоненциального вида. В этом случае при вычислении величин, входящих в (3.1.3), придется использовать процедуры численного интегрирования несобственных сходящихся интегралов.

Итак, все величины, входящие в (3.1.3), могут быть найдены как функции параметров политики управления, а из решения оптимизационной задачи – оптимальные значения этих параметров.

3.2.2. Коэффициент готовности

Дополнительно найдем такую важную характеристику качества эксплуатации системы, как стационарный коэффициент готовности. Укрупним цикл регенерации θ до $\bar{\theta}$ – времени между аварийными восстановлениями элемента. Тогда

$$E\bar{\theta} = E\zeta + E\tau_f,$$

где $E\zeta$ – математическое ожидание времени до первого отказа от начала работы.

Для $E\zeta$ справедливо равенство

$$E\zeta = E\zeta_1 + T_{n,m},$$

где $E\zeta_1$ – математическое ожидание времени от первой подачи сигнала на превентивное восстановление до первого отказа, которое можно представить как $E\zeta_1 = E\min(\tau, Z_{m,0}) + (1 - p_f)(T_{y,m} + E\zeta_1)$.

Откуда следует, что

$$E\zeta_1 = [E\min(\tau, Z_{m,0}) + (1 - p_f) T_{y,m}] / p_f.$$

По определению стационарный коэффициент готовности K_r для восстанавливаемой системы есть

$$K_r = 1 - \frac{E\tau_f}{E\theta},$$

а значит,

$$K_r = 1 - \frac{p_f E\tau_f}{E\min(\tau, Z_{m,0}) + p_f(T_{n,m} + \tau_f) + (1 - p_f)T_{y,m}} = 1 - \frac{p_f E\tau_f}{E\theta}.$$

Итак, чтобы решить задачу максимизации K_r по параметрам политики управления, следует минимизировать

$$\frac{p_f E \tau_f}{E \theta}. \quad (3.2.6)$$

В заключение отметим, что задачи оптимального управления системами, в которых используется функционал (3.2.6), принято решать как задачи технического обслуживания сложных систем [6, 8, 15].

3.2.3. Асимптотическая функция надежности

Также представляет интерес функция надежности элемента, эксплуатируемого по принципу двухуровневых политик. Предположим, что отказ является достаточно редким событием, т. е. считаем, что вероятность отказа p_f на одном цикле регенерации достаточно мала. Тогда можно найти асимптотическую функцию надежности. Для этого воспользуемся преобразованием Лапласа функций распределения случайных величин [15, 65]. Введем следующие обозначения: ζ_f – время от начала цикла регенерации до отказа, если цикл регенерации был с отказом; ζ_{nf} – длительность цикла регенерации без отказа; ζ – время от начала цикла регенерации до первого отказа элемента. Тогда в общем случае для всех рассматриваемых здесь моделей управления $E\zeta$ можно представить как

$$E\zeta = p_f E\zeta_f + p_{nf}(E\zeta_{nf} + E\zeta), p_f + p_{nf} = 1. \quad (3.2.7)$$

Введем преобразование Лапласа функций распределения этих случайных величин:

$$Ee^{-s\zeta} = \varphi(s), Ee^{-s\zeta_f} = \varphi_f(s), Ee^{-s\zeta_{nf}} = \varphi_{nf}(s).$$

Тогда (3.2.7) преобразуется к виду

$$\varphi(s) = \frac{p_f \varphi_f(s)}{1 - p_{nf} \varphi_{nf}(s)}. \quad (3.2.8)$$

Предположим, что $E\zeta_f < \infty$ и $E\zeta_{nf}^2 < \infty$. Это предположение необходимо, чтобы существовало разложение в ряд Тэйлора преобразований Лапласа соответствующих распределений случайных величин в окрестности ну-

ля. Кроме того, сделаем замену переменной s на $p_f s / E\zeta_{nf}$. Тогда (3.2.8) преобразуется в

$$\varphi\left(\frac{p_f s}{E\zeta_{nf}}\right) = \frac{p_f(1 + O(p_f))}{1 - (1 - p_f)[1 - E\zeta_{nf} \frac{p_f s}{E\zeta_{nf}} + o(p_f)]} = \frac{1 + O(p_f)}{1 + s + o(p_f)} \rightarrow \frac{1}{1 + s},$$

$p_f \rightarrow 0$

сходящееся к преобразованию Лапласа экспоненциально распределенной случайной величины. Далее, поскольку из сходимости преобразований Лапласа следует сходимость функций распределения, можно получить приближенное равенство

$$P\{\zeta \geq t\} = \exp\left(-\frac{p_f t}{E\zeta_{nf}}\right) \quad (3.2.9)$$

при малых значениях p_f . Для нахождения функции надежности при произвольном p_f необходимо найти (3.2.7) и применить к нему обратное преобразование Лапласа, что представляет собой, вообще говоря, непростую вычислительную задачу.

Покажем, что представление (3.2.9) возможно. Например, для полумарковского процесса выполняется равенство $E\zeta_{nf} = T_{0,vw} + E(\tau | \tau < Z_{v,w})$, а для процесса гибели – $E\zeta_{nf} = T_{y,m} + E(\tau | \tau < Z_{m,0})$. Эти математические ожидания находятся сходным образом с рассмотренными в параграфах 3.1 и 3.2.

3.2.4. Численное моделирование управления процессом коррозии

Приведенные выше алгоритмы вычисления функционалов качества при управлении по принципу двухуровневых политик практически невозможно реализовать с помощью аналитических выражений. Поэтому приходится использовать численные методы при решении задач оптимизации этих функционалов по параметрам политик управления. С целью проверки работоспособности предложенных алгоритмов приведем результаты численного моделирования одного из изложенных в этой главе алгоритмов на примере возможной эксплуатации корродирующего элемента.

Рассмотрим модель управления в случае, если основной элемент подвергается агрессивному внешнему воздействию. Предположим, что этот элемент имеет защитный слой величиной $h = n \bar{h}$, где \bar{h} – единица изме-

рения коррозионных потерь слоя, которые можно вычислить либо вычитанием из начальной толщины слоя фактической (утончение), либо гравиметрическим способом по потере массы. При достижении слоем нулевой величины ($h = 0$) происходит отказ элемента. Пусть имеется некоторое устройство, позволяющее подавать сигналы о предстоящем возможном отказе при достижении слоем некоторого уровня $h = m \bar{h}$. После подачи сигнала может произойти одно из двух событий: либо превентивное восстановление на величину \bar{h} , $\Delta = n - m$, через случайное время τ , либо отказ элемента, если восстановление опоздало. После отказа приходится восстанавливать не только элемент, но, возможно, и всю МС в целом. Таким образом, считаем, что стоимость послеаварийного ремонта является значимой величиной.

Предположим, что процесс коррозии можно описать марковским процессом гибели [78] и применить к нему политику управления типа рассмотренной ранее. В этом случае требуется определить параметры политики управления m и n так, чтобы функционал (3.1.3) имел наименьшее значение.

Примем, что максимально возможное значение n не больше 10 единиц, а m изменяется от 1 до 10. Восстановление защитного слоя происходит с запаздыванием на величину τ , имеющую экспоненциальное распределение с параметром ν . Кроме того, предположим, что стоимость системы управления, включающая в себя стоимость заявки на восстановление, является линейной функцией от величины восстановления: $d(\Delta) = d_0 + d_1 \Delta$. Конкретные значения различных стоимостей, входящих в (3.1.3), при которых производились исследования, приведены в таблице. Результаты численного поиска минимумов вышеуказанного функционала представлены на рис. 3.2.2.

Видно, что с ростом стоимости отказа и времени восстановления после подачи заявки (кривые 2 и 4 на рис. 3.2.2) происходит уменьшение значений как предупреждающего уровня, так и уровня основного отказа. С увеличением же стоимости заявки происходит лишь уменьшение значения предупреждающего уровня (кривая 1 на рис. 3.2.2). Из этого можно сделать основной вывод: при оптимизации функционалов типа (3.1.3) следует искать минимум по обоим параметрам одновременно, а значение n тоже является оптимизируемой величиной. Отметим, что случай $m=n$ говорит о том, что, возможно, никакого управления вообще не требуется.

Значения коэффициентов, входящих в функционал (3.1.3)

Номер п/п	c_0	c_1	c_e	d_0	d_1	$E\tau$
1	1	1	1	1	0,1–100	1
2	1	10	0,1–100	1	1	1
3	1	0,1–100	1	1	1	1
4	1	10	1	1	10	1–100

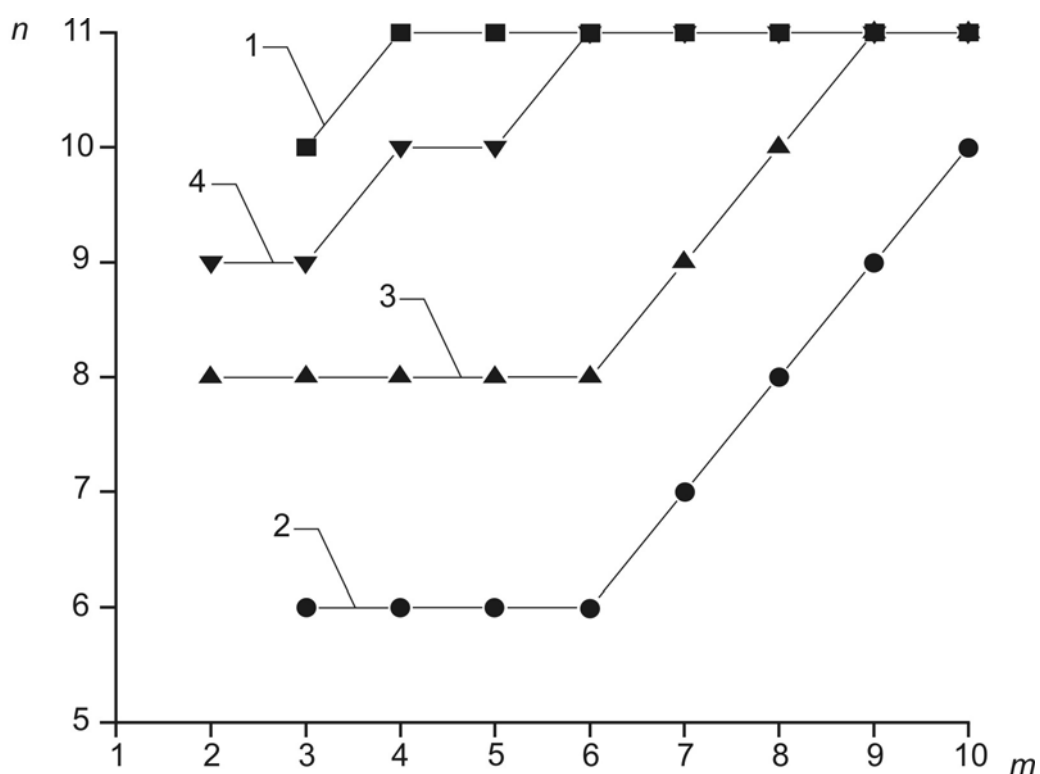


Рис. 3.2.2. График изменения оптимальных значений m и n при различных соотношениях стоимостей

3.3. Управление цепью Маркова для элементов однократного действия

В этом параграфе рассматриваются модели оптимального управления процессами деградации в классе двухуровневых политик для систем однократного и многократного действия на примере, когда процесс деградации элемента МС определяется наблюдаемым ростом трещин.

Рассмотрим элементы МС, свойства которых не могут быть восстановлены в процессе эксплуатации, и никакие действия, направленные на

изменение условий эксплуатации, также невозможны. Единственно возможной процедурой является остановка их эксплуатации после подачи сигнала предупреждения о предстоящем отказе. Предполагается, что процесс деградации наблюдаем и используется двухуровневая политика управления: требуется определить уровень процесса деградации, при котором следует подавать сигнал, и уровень, соответствующий отказу. Также производится сравнение решений задач для функционалов двух типов: систем однократного и многократного действия. С целью упрощения алгоритмов поиска оптимальных параметров политики управления предполагается, что процесс деградации описывается цепью Маркова. Использование дискретного времени при моделировании вполне оправдано, так как профилактические осмотры и другие подобные действия в условиях производства осуществляются через некоторые интервалы времени. Принятие решения об остановке эксплуатации может быть произведено обслуживающим персоналом после очередного осмотра. Остановка же производится с запаздыванием, поскольку возможность остановки технологического цикла есть не всегда.

3.3.1. Вычисление характеристик функционала стоимости

Пусть процесс деградации описывается однородной по времени цепью Маркова, где возможны только единичные скачки вверх или вниз. Считаем, что состояние нового элемента соответствует нулевому уровню процесса, а отказ – некоторому уровню n . Введем сигнальный уровень m , $m < n$. Время до превентивной остановки после подачи сигнала является случайной величиной τ с дискретной функцией распределения (раз время дискретно).

Зададим функционал качества в простейшем виде

$$R_1(m, n) = E\left(\frac{c + dI}{\theta}\right), \quad (3.3.1)$$

где $I = I\{Z_{m,n} \leq \tau\}$ – индикатор отказа.

Представим (3.3.1) в виде

$$R_2(m, n) = cE(\theta^{-1}) + dE(I\theta^{-1}) \quad (3.3.2)$$

и рассмотрим подробнее способ вычисления второго слагаемого.

Пусть $\{D_m, \dots, D_i, \dots\}$, $i > m$ – разбиение пространства элементарных событий Ω , где $D_i = \{\omega | \theta = i\}$ и $\mathfrak{J} = \sigma\{D_m, \dots, D_i, \dots\}$ – сигма-алгебра, образованная счетной последовательностью этих событий.

Ясно, что θ^{-1} является \mathfrak{J} -измеримой случайной величиной и она представима в виде

$$\theta^{-1} = \sum_{i=m}^{\infty} i^{-1} I\{D_i\}.$$

Для $E(I\theta^{-1})$ всегда можно записать формулу полной вероятности:

$$E(I\theta^{-1}) = E(E(I\theta^{-1}|\mathfrak{J})), \quad (3.3.3)$$

где $E(I\theta^{-1}|\mathfrak{J})$ – условное математическое ожидание относительно сигма-алгебры \mathfrak{J} , порожденной случайной величиной θ .

Используем свойства условных математических ожиданий и получаем

$$E(I\theta^{-1}|\mathfrak{J}) = E(I|\mathfrak{J})\theta. \quad (3.3.4)$$

В правой части (3.3.4) в числителе и знаменателе дроби стоят \mathfrak{J} -измеримые случайные величины, а значит, можно записать разложение (3.3.4) по разбиению пространства Ω :

$$E(I\theta^{-1} | \mathfrak{J}) = \sum_{i=m}^{\infty} i^{-1} E(I | D_i) I\{D_i\}. \quad (3.3.5)$$

Из (3.3.3) и (3.3.5) следует, что

$$E(I/\theta) = \sum_{i=m}^{\infty} i^{-1} E(I | D_i) P\{D_i\}.$$

По определению условного математического ожидания случайной величины относительно события D_i выполняется равенство

$$E(I|D_i) = E(II(D_i))/P\{D_i\},$$

а значит,

$$E(I/\theta) = \sum_{i=m}^{\infty} i^{-1} E(II(D_i)). \quad (3.3.6)$$

С помощью равенства (3.3.6) можно вычислить значения (3.3.2) при каждом m и n .

Запишем время до остановки θ в виде

$$\theta = Z_{0,m} + \min(\tau, Z_{m,n}).$$

Тогда индикатор события, показывающий, что остановка произошла в момент $\theta = i$, $i = m, \dots$, представляется суммой индикаторов следующих событий:

$$I(D_i) = \sum_{j=0}^{i-m} (I\{Z_{0,m} = i - j, Z_{m,n} = j, \tau \geq j\} + I\{Z_{0,m} = i - j, Z_{m,n} > j, \tau = j\}).$$

По свойству индикаторов

$$II\{Z_{0,m} = i - j, Z_{m,n} > j, \tau = j\} = II\{Z_{0,m} = i - j, Z_{m,n} > j, \tau = j, Z_{m,n} \leq \tau\} = 0,$$

следовательно,

$$II(D_i) = \sum_{j=0}^{i-m} I\{Z_{0,m} = i - j, Z_{m,n} = j, \tau \geq j\}.$$

Применяя операцию математического ожидания к этим индикаторам и используя марковское свойство цепи, окончательно представим (3.3.1) как

$$c \sum_{i=m}^{\infty} i^{-1} P\{\theta = i\} + d \sum_{i=m}^{\infty} i^{-1} \sum_{j=0}^{i-m} P\{Z_{0,m} = i - j\} P\{Z_{m,n} = j\} P\{\tau \geq j\}, \quad (3.3.7)$$

$$\text{где } P\{\theta = i\} = \sum_{j=0}^{i-m} P\{Z_{0,m} = i - j\} [P\{Z_{m,n} = j\} P\{\tau \geq j\} + P\{\tau = j\} P\{Z_{m,n} > j\}].$$

Решение задачи оптимизации (3.3.7) рассматривается далее на примере моделирования роста трещины с помощью цепи Маркова.

3.3.2. Простейшая марковская цепь

Рассмотрим модель процесса деградации (например, рост трещины), представленную монотонной однородной цепью Маркова с единичными скачками, у которой переходные вероятности не зависят от уровня. Это означает, что в дискретные моменты времени $i = 1, 2, \dots$ с вероятностью q длина трещины останется той же самой, и с вероятностью p длина трещины подрастет на одну единицу, $p + q = 1$. Пусть число состояний j изменя-

ется от 0 до n . Распределение длины трещины в момент времени i представляется вектором

$$\{p_i(0), \dots, p_i(n)\}, \sum_{j=0}^n p_i(j) = 1,$$

где $p_i(j)$ имеют смысл вероятности того, что в момент i длина трещины составит j единиц.

Состояние n – поглощающее, т. е. $P\{\text{время до отказа} \leq i\} = p_i(n)$. Предположим, что $p_0(0) = 1$, тогда время Z_{0j} достижения произвольного состояния $j, j = 1, 2, \dots, n$, из состояния 0 определяется как

$$Z_{0j} = \xi_0 + \dots + \xi_{j-1},$$

где $\xi_k, k = 0, 1, \dots, n-1$ – случайное время пребывания процесса в состоянии k .

В случае различных между собой переходных вероятностей ($p_j \neq p$) формулы для вычисления математического ожидания и дисперсии времени перехода с уровня 0 на уровень j имеют вид

$$EZ_{0j} = j - 1 + \sum_{k=1}^{j-1} \psi_k, \quad DZ_{0j} = \sum_{k=1}^{j-1} \psi_k (1 + \psi_k),$$

где $\psi_k = q_k/p_k$.

Если предположить, что $\psi_k = \psi, k = 1, \dots, n-1$, то получится

$$DZ_{0j}/EZ_{0j} = \psi, \quad \psi = q/p.$$

Для простоты примем, что запаздывание τ распределено по закону Пуассона с параметром λ :

$$P\{\tau = j\} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!}, j = 0, 1, 2, \dots \quad P\{\tau \geq j\} = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

Требуется вычислить для элементов многократного и однократного действия следующие функционалы качества управления:

$$R_1 = \frac{c + dP\{Z_{mn} \leq \tau\}}{E\theta}, \quad (3.3.8)$$

$$R_2 = E\left(\frac{c + dI\{Z_{mn} \leq \tau\}}{\theta}\right). \quad (3.3.9)$$

Прежде чем записать соответствующие формулы для вычисления значений, приведем некоторые общие соображения, которые позволят получить эти формулы более простым способом. Чтобы найти $P\{Z_{0m} = i\}$, а также $P\{Z_{mn} = i\}$ в общем случае для однородной цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей произвольного вида, необходимо решить уравнения Колмогорова – Чепмена с поглощающими состояниями m или n . Отметим, что для монотонной цепи хорошо подходит метод производящих функций. В результате решения уравнений будет найдена вероятность

$$P\{X(i) = m | X(0) = 0\}, \quad (3.3.10)$$

где m – поглощающее состояние и соответствующий элемент матрицы переходных вероятностей таков, что $p_{mm} = 1$.

Ясно, что (3.3.10) есть вероятность того, что время первого достижения состояния m меньше или равно i , т. е.

$$P\{Z_{0m} \leq i\} = P\{X(i) = m | X(0) = 0\}. \quad (3.3.11)$$

Так как Z_{0m} – дискретная величина, то справедливы равенства

$$P\{Z_{0m} = i\} = P\{Z_{0m} \leq i\} - P\{Z_{0m} \leq i - 1\}$$

и

$$P\{Z_{0m} = i\} = P\{Z_{0m} \leq i + 1\} - P\{Z_{0m} \leq i\}.$$

Запишем еще два полезных равенства, которые могут помочь в нахождении искомых вероятностей. Поскольку m – поглощающее состояние и матрица переходных вероятностей стохастическая, т. е. сумма значений элементов каждой строки равна 1, то можно найти (3.3.11) как соответствующие дополнения до полной группы событий по состояниям:

$$P\{Z_{0m} \leq i\} = 1 - \sum_{j=0}^{m-1} P\{X(i) = j | X(0) = 0\}$$

или по времени:

$$P\{Z_{0m} \leq i\} = \sum_{k=1}^i P\{X(k) = m | X(0) = 0\}.$$

В рассматриваемом случае матрица имеет очень простой вид, и чтобы найти $P\{X(i) = j | X(0) = 0\}$, можно воспользоваться интерпретацией этой вероятности в терминах испытаний Бернулли. Тогда событие $\{X(i) = j | X(0) = 0\}$ следует рассматривать как j положительных исходов за i испытаний: $j \leq i$.

Рассмотрим последовательность случайных величин η_1, η_2, \dots , принимающих значение либо 0, либо 1, таких, что

$$\forall i \ P\{\eta_1 = 1\} = p, P\{\eta_i = 0\} = q, p + q = 1.$$

Положим $S_0 = 0, S_i = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_i$. Последовательность S_0, S_1, \dots можно рассматривать как траекторию в фазовом пространстве состояний процесса роста длины трещины. Введем в рассмотрение события из основного вероятностного пространства:

$$A_{ij} = \{\omega | S_i = j\}, i \geq j,$$

означающие, что за время i произойдет j выпадений 1. Следовательно, получаем биномиальное распределение испытаний Бернулли, т. е. событие A_{ij} эквивалентно событию $\{X(i) = j | X(0) = 0\}$, и значит,

$$\{X(i) = j | X(0) = 0\} = C_i^j p^j q^{i-j},$$

$$P\{X(i) = j | X(0) = 0\} = C_i^j p^j q^{i-j}, i = 1, 2, \dots, j = 0, 1, \dots, i.$$

Чтобы найти распределение момента времени первого достижения состояния m , посмотрим, какие траектории входят в событие $\{Z_{0m} = i\}$. Это те траектории, которые как угодно попали в состояние $(m - 1)$ за время $(i - 1)$ и на i -м шаге попали в состояние m . Следовательно, в силу марковости

$$\begin{aligned} P\{Z_{0m} = i\} &= P\{X(i) = m, X(i - 1) = m - 1 | X(0) = 0\} = \\ &= P\{X(i) = m, X(i - 1) = m - 1\} P\{X(i - 1) = m - 1 | X(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Поскольку первый сомножитель есть p , а второй — $C_{i-1}^{m-1} p^{m-1} q^{i-m}$, то для времени первого достижения получаем отрицательно-биномиальное распределение

$$P\{Z_{0m} = i\} = C_{i-1}^{m-1} p^m q^{i-m}, m = 1, 2, \dots, i = m, m + 1, \dots$$

Этих выкладок достаточно для определения всех величин, входящих в (3.3.8–3.3.9). Приведем для удобства все соответствующие формулы расчета значений величин, входящих в эти функционалы. Непосредственный вывод, вследствие его очевидности, опускается.

Для элемента многократного действия:

$$EZ_{0m} = m(q/p + 1),$$

$$P\{Z_{0m} \leq \tau\} = \sum_{j=n-m}^{\infty} \left(P\{\tau = j\} \sum_{k=n-m}^j P\{Z_{mn} = k\} \right),$$

$$E \min(\tau, Z_{mn}) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} P\{\tau = k\} \sum_{k=j}^{\infty} P\{Z_{mn} = k\} \right).$$

Для элемента однократного действия:

$$P\{Z_{0m} = i - j\} = \begin{cases} C_{i-j-1}^{m-1} p^m q^{i-j-m}, & i - j \geq m \\ 0, & 0 \leq i - j < m \end{cases},$$

$$P\{Z_{mn} = j\} = \begin{cases} C_{j-1}^{n-m-1} p^{n-m} q^{j-(n-m)}, & j \geq n - m \\ 0, & 0 \leq j < n - m \end{cases},$$

$$P\{Z_{mn} > j\} = \begin{cases} \sum_{k=j+1}^{\infty} P\{Z_{mn} = k\}, & j \geq n - m \\ 1, & 0 \leq j < n - m \end{cases}.$$

3.3.3. Моделирование роста трещины

В механике разрушения часто используются однопараметрические критерии разрушения, согласно которым усталостная прочность детали оценивается по магистральной трещине. В настоящее время существует большое количество работ, посвященных описанию процессов усталостного роста трещин с помощью однородных цепей Маркова [5, 124, 125, 127 и др.].

Предположение, что $\psi_k = \psi$, хорошо согласуется с результатами эксперимента, проведенного для 20 образцов из стали АРФН-60 при испытании симметричным знакопеременным нагружением с максимальной амплитудой цикла 145 Мпа [124]. Принято, что время подрастания поделено на 2000*i* циклов нагружения. Число состояний до отказа получилось равным 8, а значения *p* и *q* равными 1/16 и 15/16, соответственно. Причем, следует отметить, равенство $\psi_k = \psi$ выполнялось вне зависимости от того, как проводились испытания: или с постоянной амплитудой нагружения, или с постоянной амплитудой коэффициента интенсивности напряжений.

Теперь попробуем отыскать оптимальное значение параметра *m* политики управления для функционалов (3.3.8) и (3.3.9) при различных зна-

чениях стоимости отказа. Поведение функционалов стоимости показано на рис. 3.3.1 и 3.3.2 в виде поверхностей, а в таблице приведены их оптимальные значения.

Подчеркнем, что для данной задачи также характерно мажорирующее свойство функционала (3.3.9), которое было доказано выше. Это означает, что оптимальные параметры для систем однократного действия должны рассчитываться по своему собственному функционалу, иначе могут быть допущены большие отклонения от истинных значений параметров политик управления.

Оптимальные значения m

d/c		0,1	1	10	20
Функционал (3.3.8)					
$E\tau = 16$	$m =$	7	5	4	3
$E\tau = 32$	$m =$	7	4	2	2
Функционал (3.3.9)					
$E\tau = 16$	$m =$	7	4	3	2
$E\tau = 32$	$m =$	7	3	2	1

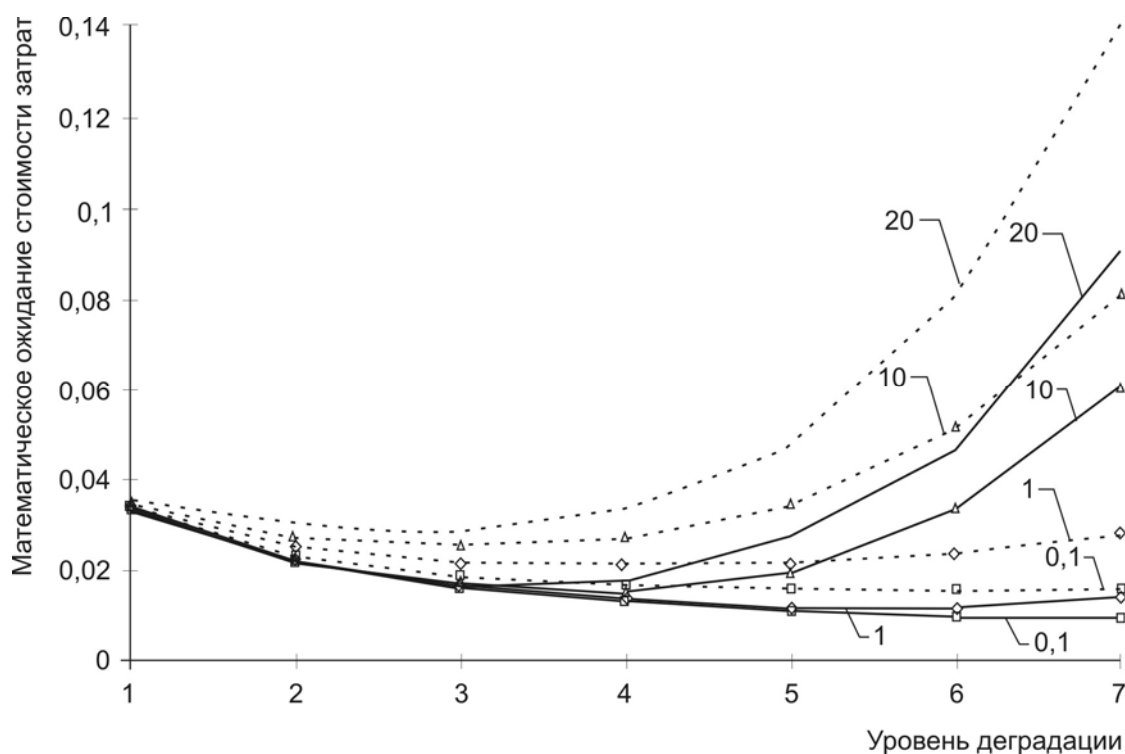


Рис. 3.3.1. Значения функционала (3.3.8) в зависимости от предельного уровня m при $E\tau = 16$

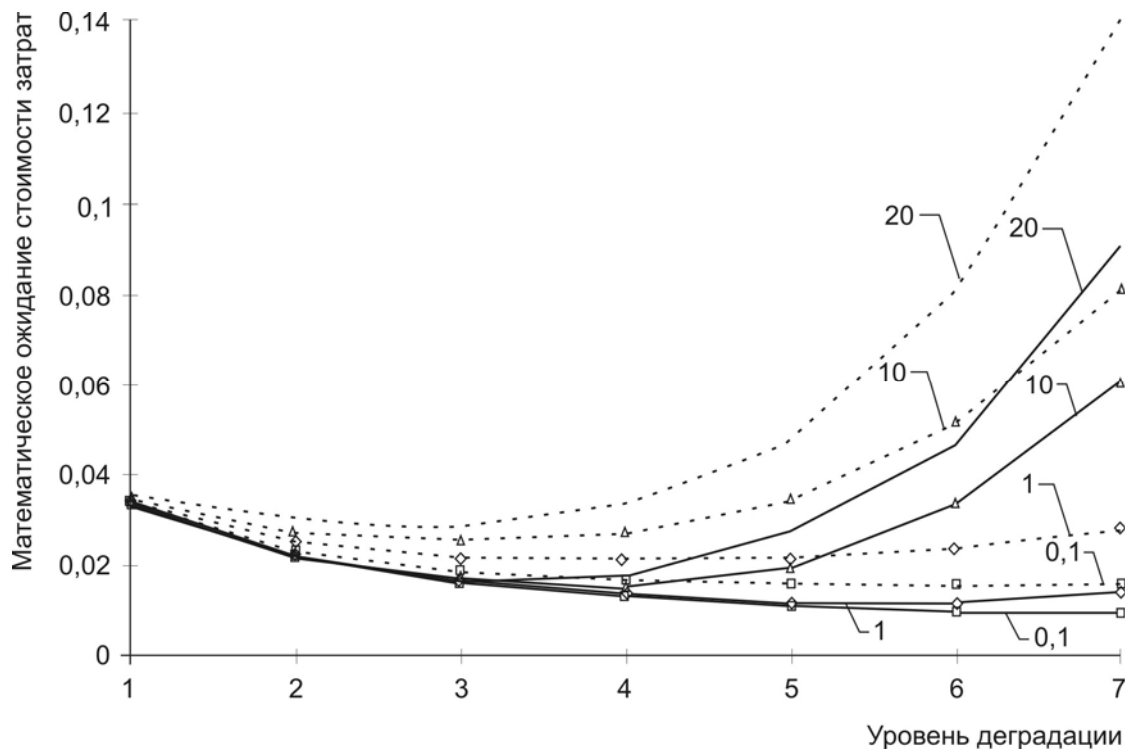


Рис. 3.3.2. Значения функционала (3.3.9) в зависимости от предельного уровня m при $E\tau = 32$

Рассмотренные в данной главе алгоритмы управления марковскими процессами в классе двухуровневых политик позволяют промоделировать ряд задач управления надежностью в случае, если процессы деградации наблюдаемы и есть возможность назначить некоторый оптимальный предупреждающий уровень, сигнализирующий о возможном отказе в ближайшем будущем. Для ненаблюдаемых процессов подобная постановка вопроса также возможна, но необходимо научиться устанавливать указанный предельный уровень безопасной эксплуатации. Как правило, для ненаблюдаемых процессов мы не знаем истинного уровня повреждения и можем говорить лишь о нахождении процесса в некоторой области, поэтому прямое использование моделей и алгоритмов, рассмотренных в данной главе, вряд ли возможно, хотя особых препятствий для расширения их до работы с областями, по-видимому, не имеется.

Глава 4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ УСТАЛОСТИ: ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

Использование методов управления процессами деградации при решении задач управления надежностью механических систем, рассмотренных в предыдущих главах, подразумевает наличие достаточно богатой вероятностной структуры моделей деградации. Марковские процессы, использованные для решения задач в третьей главе, являются, несомненно, развитой и широко используемой для описания наблюдаемых процессов деградации моделью. Кроме того, свойство наблюдаемости делает возможным статистическое определение параметров процессов деградации. Применение марковских процессов для описания ненаблюдаемого процесса накопления усталостных повреждений также возможно, и этому направлению исследований посвящено немалое количество работ [3, 5, 25, 28, 76, 92]. Однако следует отметить, что определение статистических параметров таких развитых моделей, какими являются марковские процессы, весьма трудоемко, и задачи проверки статистических гипотез о параметрах моделей не проработаны в достаточной мере, тем более для ненаблюдаемых процессов.

Одной из достаточно простых концепций введения вероятностных характеристик в описание усталостных свойств элементов МС является рандомизация некоторых параметров кривых усталости и проведение дальнейших расчетов по определению ресурса уже со случайными величинами по правилам теории вероятностей. Однако чтобы не нарушить внутренней гармонии моделей накопления усталостных повреждений и не получить результатов, противоречащих экспериментам и здравому смыслу, следует проявлять большую осторожность при рандомизации параметров кривых усталости.

В основе формирования предлагаемых ниже моделей лежит концепция построения индивидуальных кривых усталости (ИКУ) элементов МС, разработке которой посвящено несколько трудов [44, 62, 63, 67, 68]. В данной работе исследуются два основных способа построения ИКУ: прямой (данная глава) и обратный (следующая глава). Предполагается, что для описания кривой усталости используется степенная зависимость типа (1.4.1–1.4.3). Полученные стохастические модели накопления усталостных повреждений, базирующиеся на линейной модели накопления повреждений, принимают весьма простой смысл и, как надеется автор, могут быть легко восприняты инженерами-прак-

тиками, особенно при наличии соответствующего программного обеспечения. Излагаемая ниже стохастическая модель накопления повреждений, позволяющая не менять внешний вид линейной модели накопления, существенно расширяет диапазон использования детерминированных моделей расчета долговечности, не слишком увеличивая требования к объему исходной информации, и может рассматриваться как своеобразная надстройка над детерминированными моделями.

4.1. Метод рандомизации предела выносливости

Простейшим способом формирования вероятностных зависимостей, описывающих стохастические усталостные свойства элементов конструкций, является рандомизация предела выносливости. Метод рандомизации предела выносливости уже был использован во второй главе при определении оптимального правила остановки, хотя и без подробных пояснений правомерности такого подхода. Ниже рассматриваются три возможные модели рандомизации, проверяется адекватность описания на их основе феномена усталости при минимуме информации о выносливости конструкции и обсуждаются преимущества и недостатки этих моделей.

Как уже указывалось выше, центральное место в задачах прогнозирования ресурса занимает та или иная модель накопления повреждений. Поскольку наибольшее распространение в технике получила линейная гипотеза суммирования повреждений и по ее применению выпущено большое количество справочной литературы, то будем считать, что накопление повреждений происходит так, как описано в параграфе 1.4, и сосредоточим наше внимание на расширении этой гипотезы до стохастической модели накопления повреждений. В данном параграфе показано, как следует производить взаимосогласованные вычисления ресурса и предела выносливости для предлагаемых моделей.

Считаем, что, по крайней мере, известна медианная кривая усталости (1.4.1–1.4.2), а для предела выносливости S_R известны его среднее ES_R и стандартное отклонение σ_{S_R} .

Рассматривая S_R в зависимостях (1.4.1–1.4.2) как случайную величину на вероятностном пространстве (Ω, J, P) , распределенную по некоторому вероятностному закону, приходим к модели описания усталостных свойств образцов уже некоторым семейством случайных объектов – кривых усталости.

А это означает, что каждому случайному значению S_R соответствует уже своя кривая усталости. Данное статистическое предположение отражает гипотетическую идею о том, что у каждого образца существует своя ИКУ, которая, однако, не может быть получена экспериментальным путем, поскольку каждый образец может быть разрушен лишь один раз. На вероятностном языке это означает, что в пространстве элементарных событий Ω должна существовать точка ω , которая и определяет свойства образца.

Распределения случайных величин, входящих в описание кривых усталости, должны выражать статистические зависимости характеристик сопротивления усталости, отражающих реальное усталостное поведение образцов. Поэтому сформулируем основное требование к стохастической модели накопления повреждений, на которое и будет прежде всего обращено наше внимание: помимо адекватности экспериментальным данным необходимо, чтобы все случайные величины, входящие в описание модели усталости, и значения рассчитываемых долговечностей были статистически взаимосвязаны.

Впервые индивидуальные кривые усталости были предложены к использованию для расчетов элементов конструкций авиационной техники А. Ф. Селиховым [67, 68]. Однако следует отметить, что эти модели имеют несколько тяжеловесный вид, и если в авиационной промышленности можно изыскать средства и оборудование для проведения всех необходимых экспериментальных исследований для использования моделей усталости, то в обычном машиностроении это сделать весьма затруднительно. Поэтому заведомо приходится идти на некоторые упрощения и компромиссы при построении стохастических моделей накопления усталостных повреждений.

Наибольшую популярность при обработке значений долговечности при регулярных режимах нагружения получили логнормальное распределение и распределение Вейбулла. С практической точки зрения эти распределения чрезвычайно удобны для описания рассеяния долговечностей, поскольку именно для кривых усталости вида (1.4.1–1.4.2) распределения Вейбулла и логнормальное образуют семейства распределений одного типа относительно степенной зависимости $y = ax^m$. Так, например, если воспользоваться этими типами распределений для параметра S_R (при других фиксированных параметрах в (1.4.1–1.4.2)), то это приведет к таким же распределениям значений долговечности N . При каких-либо других предположениях о распределении S_R для данного вида кривой усталости без должной осторожности можно прийти к ошибочным результатам.

4.1.1. Логнормальное распределение

Для определенности будем считать, что параметр S_R имеет логнормальное распределение с плотностью

$$f_1(x) = \frac{\log e}{x(2\pi)^{1/2} s_R} \exp\left(-\frac{(\log x - m_R)^2}{2s_R^2}\right), \quad (4.1.1)$$

где характеристики m_R и s_R выражаются через математическое ожидание ES_R и стандартное отклонение σ_{S_R} следующим образом:

$$\begin{aligned} m_R &= \log ES_R - \log[1 + (\sigma_{S_R} / ES_R)^2] / 2, \\ s_R &= \left(\log e \log \left[1 + (\sigma_{S_R} / ES_R)^2 \right] \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

$$\begin{aligned} \log ES_R &= m_R + s_R^2 / 2 \log e, \\ \sigma_{S_R} / ES_R &= \left(10^{(s_R / \log e)^2} - 1 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Рассмотрим три возможных варианта рандомизации кривых усталости по параметру S_R с выбранным типом распределения (4.1.1–4.1.3). Аналогичные результаты могут быть получены и с распределением Вейбулла.

4.1.2. Модели индивидуальных кривых усталости

Модель 1. Пусть распределение S_R задается с помощью (4.1.1–4.1.3). Если принять диапазон изменения этой случайной величины от 0 до ∞ , то получится семейство индивидуальных прямых усталости, параллельных друг другу в логарифмических координатах типа изображенных на рис. 4.1.1, а.

ИКУ определяются зависимостью

$$N(S) = N_0 (S_R / S)^m, \quad S > 0, \quad (4.1.4)$$

где S_R – случайная величина, имеющая плотность распределения $f_1(x)$ вида (4.1.1); $S_R > 0$.

Распределения $f_1(y)$ долговечностей $N(S)$ для всех возможных значений амплитуд циклов нагружения S является обычным логнормальным распределением типа (4.1.1–4.1.3) с параметрами

$$m_N = \log N_0 + m(m_R - \log S), \quad s_N = m s_R. \quad (4.1.5)$$

Среднее значение $E \log N(S) = m_N$ совпадает с исходной кривой усталости до значений $\log S \geq E \log S_R$ в уравнении (4.1.2) и продолжается ниже

этого значения. В данном случае параметр S_R уже теряет смысл предела выносливости и перелома ИКУ при достижении числа циклов n значения N_0 не происходит.

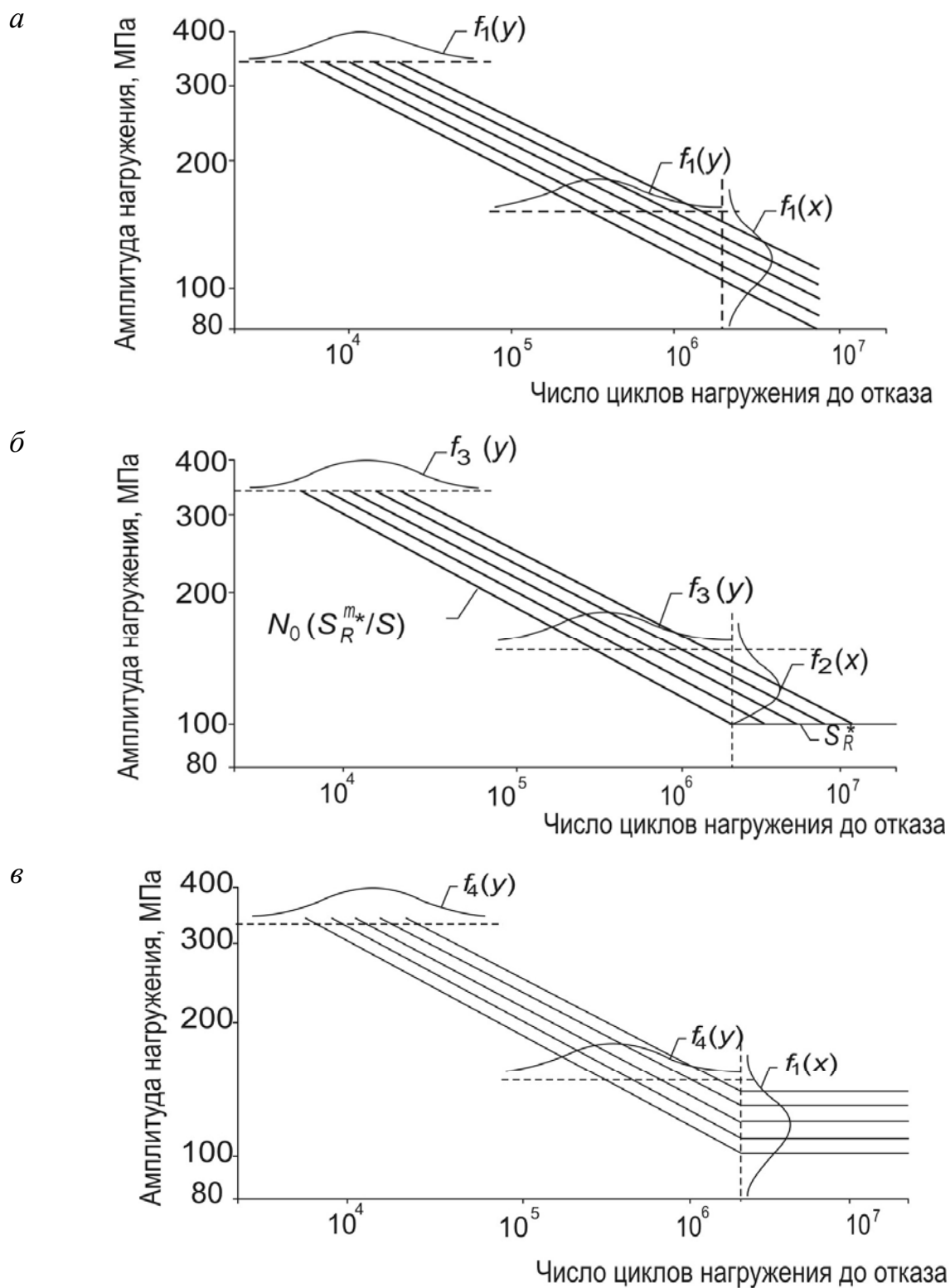


Рис. 4.1.1. Индивидуальные кривые усталости:

a – модель 1; *б* – модель 2; *в* – модель 3

Такой способ рандомизации кривых усталости по пределу выносливости предполагает, что мы забыли о том, что на самом деле S_R является пределом выносливости и кривые усталости в нашем представлении должны иметь перелом в точке N_0 при достижении значениями S предела выносливости. S_R в данном случае приобретает смысл некоторого параметра прочности, отвечающего за рассеяние усталостных свойств образцов [9, 25].

Модель 2. Если для модели 1 характерно наличие логического противоречия, заключающегося в том, что у кривых усталости исчез предел выносливости, то в модели 2 это противоречие преодолено. Предположим все-таки, что предел S_R имеет некоторое нижнее ограничение: S_R^* , $S_R \geq S_R^*$. Тогда распределение S_R будет определяться уже трехпараметрическим логнормальным распределением с порогом S_R^* (если за базовое распределение взято логнормальное):

$$f_2(x) = \frac{\log e}{(2\pi)^{1/2} s_R (x - S_R^*)} \exp\left(-\frac{(\log(x - S_R^*) - m_R)^2}{2s_R^2}\right), x > 0, \quad (4.1.6)$$

где параметры m_R и s_R уже имеют другие значения, чем в (4.1.2–4.1.3).

Это означает, что каждая ИКУ имеет один и тот же предел выносливости S_R^* и, соответственно, принимает вид (рис. 4.1.1, б)

$$N(S) = N_0(S_R/S)^m, S > S_R^*, \quad (4.1.7)$$

с пределом S_R , распределенным по закону (4.1.6). Соответствующее распределение долговечностей N принимает достаточно сложный вид, поскольку логнормальные распределения с порогом уже не образуют семейства одного типа относительно степенного функционального преобразования:

$$f_3(y) = \frac{\log e y^{1/m-1}}{(2\pi)^{1/2} s_N [y^{1/m} - N_0^{1/m}(S_R^*/S_R)]} \exp\left(-\frac{[m \log[y - N_0^{1/m}(S_R^*/S_R)] - m_N]^2}{2s_N^2}\right),$$

$$y > N_0(S_R^*/S_R), \quad (4.1.8)$$

где m_N и s_N определяются также с помощью (4.1.5).

Семейство так построенных кривых усталости ограничено слева кривой $N_0(S_R^*/S_R)$ (см. рис. 4.1.1, б). Появляется непростая задача подбора параметров S_R^* , m_R и s_R таким образом, чтобы математическое ожидание долговечностей $E \log N(s)$ совпадало с экспериментальной средней кривой усталости (1.4.1). Кроме того, сложилась ситуация, когда параметр S_R^* приобрел смысл предела

выносливости для всех ИКУ, определяющих поведение различных образцов. Поэтому предлагается рассмотреть следующий вариант – модель 3.

Модель 3. Предыдущие случаи, в общем, дают некоторое представление о виде кривых усталости, которые могут быть получены с помощью рандомизации одной случайной переменной S_R , но отсутствие предела выносливости в первом варианте и один-единственный предел выносливости S_R^* для всех ИКУ во втором варианте не позволяют считать их достаточно приемлемыми способами конструирования ИКУ. Поэтому введем для каждой кривой усталости вида (4.1.4) свой предел выносливости. То есть будем считать, что распределение (4.1.1) задает рассеяние действительно предела выносливости и каждая ИКУ, достигающая значения N_0 , имеет точку перелома, как это изображено на рис. 4.1.1, в.

Итак, будем считать, что ИКУ задаются в точности уравнением (4.1.4) при логнормальном распределении $f_1(x)$ переменной S_R , которую теперь можно вполне назвать пределом выносливости.

При данном представлении ИКУ необходимо получаются несобственные распределения $f_4(y)$ значений долговечностей N , поскольку, если исходить из предположения о наличии перелома у ИКУ, для каждого значения амплитуды нагружения S при базовых испытаниях должно получаться при дальнейшем нагружении бесконечное число циклов до разрушения. Это предположение может быть оправдано тем, что при больших амплитудах нагружения мы практически не добираемся до базы испытаний, а при малых амплитудах часто имеются незаконченные испытания, что дает нам повод действительно предполагать существование предела выносливости у некоторых образцов при данном нагружении с амплитудой S .

Тогда в силу наличия зависимостей (4.1.4–4.1.5) между пределом выносливости S_R и долговечностью N при каждом значении S несобственное распределение $f_4(y)$ долговечностей может быть выражено через распределение $f_1(y)$ следующим образом:

$$f_4(y) = f_1(y), y \in (0, N_0], \quad (4.1.9)$$

где параметры m_N и s_N определяются аналогично (4.1.5).

Математическое ожидание долговечности при несобственном распределении (4.1.9) принимает бесконечное значение. Однако, если ввести множество $A(S) = \{N(S) \leq N_0\}$, то математическое ожидание $E[N^*(S)] = E[N(S) I\{A(S)\}]$ примет конечное значение. На рис. 4.1.2, а изображено возможное расхож-

дение с исходными кривыми усталости при некоторых параметрах N_0 , m и $E\log S_R$. Вероятность $P\{A(S)\}$ как функция амплитуд нагружения изображена на рис. 4.1.2, б. Видно, что различие между модельной оценкой и экспериментальными кривыми усталости может быть весьма значительным.

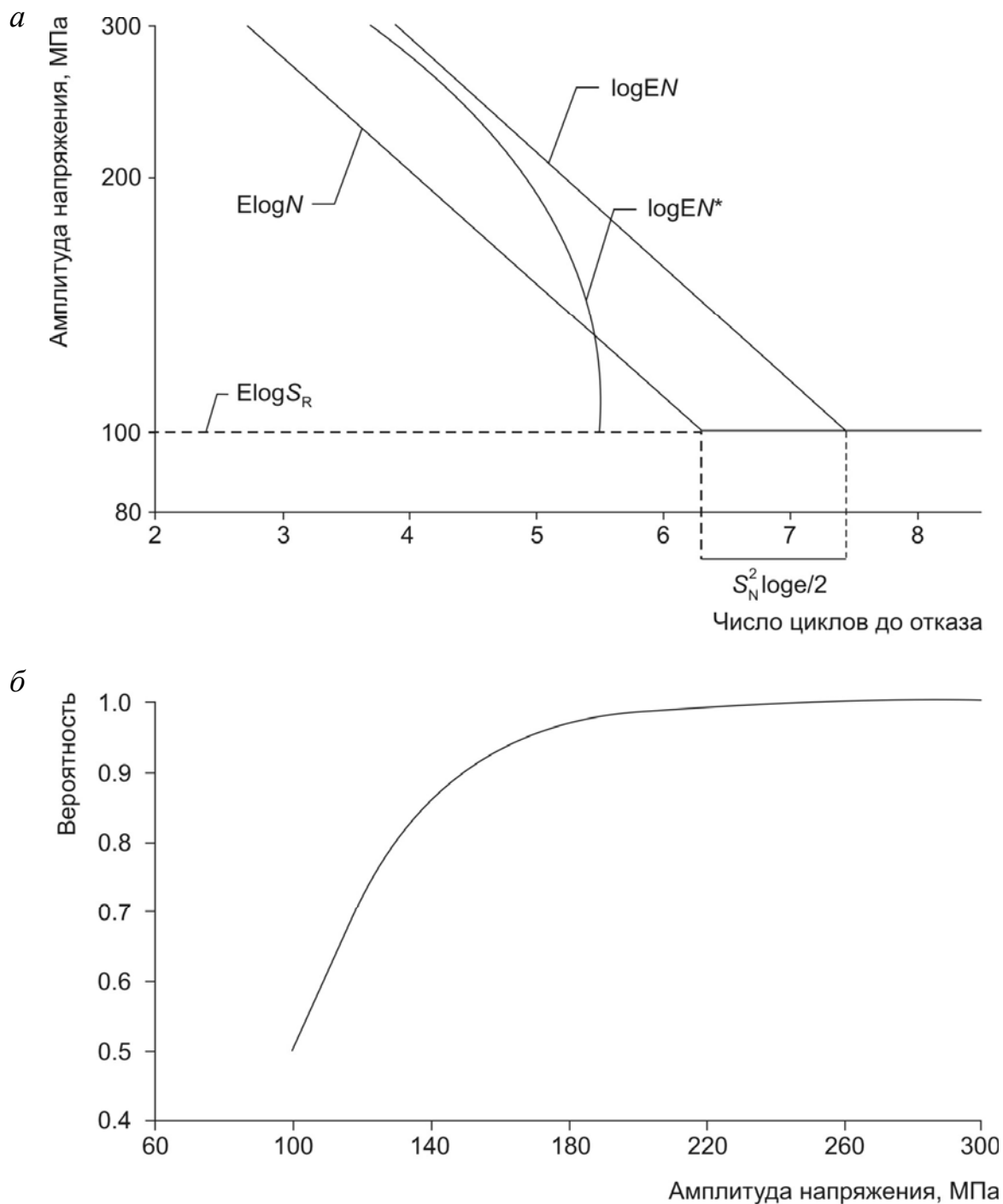


Рис. 4.1.2. Отклонения математического ожидания ресурса по модели 3 от исходной кривой усталости:

a – кривые усталости, b – изменение вероятности усечения ресурса

4.1.3. Накопление повреждений

Накопленное повреждение при какой-либо истории нагружения для всех рассмотренных выше моделей определяется по формулам, приведенным в таблице «Основные детерминированные зависимости для расчета накопленного повреждения и значений ресурса», гл. 1, поскольку суммирование повреждений по правилу Пальмгрена – Майнера происходит по какой-либо фиксированной ИКУ. Другое дело, что нам не известно, какая из ИКУ участвует в накоплении повреждений. Но это и не обязательно, достаточно знать о самом существовании данной гипотезы, что позволяет обращаться со случайными объектами – ИКУ, задаваемыми случайным параметром S_R , нужным образом.

Разберем вышесказанное на примере ступенчатого нагружения. Предположим, история нагружения h некоторого образца состоит из k пар чисел, определяющих число циклов нагружения n_i с амплитудой S_i , $i = 1, \dots, k$, т. е. $h = \{(n_1, S_1), \dots, (n_k, S_k)\}$.

Тогда, в соответствии с линейной моделью накопления повреждений, накопленное повреждение составит случайную величину

$$\mu(\omega) = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i(S_R(\omega))}. \quad (4.1.10)$$

Следует отметить, что в выражении (4.1.10) производится суммирование не случайных величин, а детерминированных. Просто мы не знаем, какой образец определяется точкой ω из пространства элементарных событий Ω введенного вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Это означает, что для того, чтобы определить распределение накопленного повреждения $P\{\mu \in A\}$, надо найти множество B такое, что

$$P\{\mu \in A\} = P\{S_R \in B\}, \quad (4.1.11)$$

причем это равенство должно выполняться почти всюду.

Отметим, что ИКУ задаются целым комплексом функций разных классов. Это функции:

- а) распределения параметра S_R ;
- б) функциональной зависимости между параметром S_R и ресурсом N ;
- в) распределения ресурса N .

Стохастические соотношения (4.1.10–4.1.11) дают основную идею, позволяющую обозначить распределение накопленного повреждения. Вместе с тем, благодаря соотношению (1.4.9) можно получить распределение ресурса, не вычисляя явно распределение повреждений.

4.2. Оценка распределений ресурса

Нахождение распределений ресурса элемента МС при том или ином режиме нагружения является основной задачей усталостной надежности, и в определенной мере ее решение уже освещалось в параграфе 4.1 при нахождении распределений $f_i(y)$, $i = 1, 3, 4$, при регулярном нагружении. Кроме того, необходимо изучить возможности прогнозирования ресурса на основе индивидуальных кривых усталости.

Рассмотрим случай стационарного эргодического процесса нагружения с плотностью распределения $F(S)$ амплитуд циклов нагружения, получаемых с помощью какого-либо метода схематизации. Предположим, что накопление повреждений происходит по линейной гипотезе Пальмгрена – Майнера и единичное повреждение определяется как

$$\mu = \int_{S_{\lim}}^{\infty} \frac{f(S)dS}{N(S)}, \quad (4.2.1)$$

где $N(S)$ есть некоторая ИКУ для каждого выборочного значения предела S_R , определяемая усталостными свойствами образца элемента МС, а S_{\lim} – нижний предел интегрирования, различный для каждой из трех предлагаемых моделей ИКУ. Для каждого значения S_R функция $N(S)$ есть детерминированная функция, поэтому интеграл может быть рассчитан как обычный, а форма линейной гипотезы накопления повреждений внешне не изменяется. В первом варианте интегрирование производится от значения $S_{\lim} = 0$; во втором варианте – от детерминированного значения предела выносливости $S_{\lim} = S_R^*$; в третьем варианте – от случайного предела выносливости $S_{\lim} = S_R$.

В сущности, необходимость правильного понимания и расстановки пределов интегрирования в (4.2.1), а также корректного обращения со случайными величинами и их распределениями на основе этой формулы и приводит к задаче моделирования усталостных свойств образцов с помощью ИКУ и к возникновению именно трех вышеописанных моделей ИКУ.

4.2.1. Формулы для вычисления характеристического ресурса

Ресурс при таком нагружении определяется как обратная величина к единичному повреждению, среднему по амплитудам нагружения (см. таблицу, гл. 1). Поэтому можно воспользоваться формулами для характеристического ресурса, определенного для данной кривой усталости (4.2.1), имея в виду предположение о детерминированном характере предела выносливости и собственно кривых усталости. Распределение амплитуд процесса нагружения может быть описано весьма гибким трехпараметрическим гамма-распределением с плотностью [25]

$$f(S) = \frac{\alpha \beta^{\gamma/\alpha}}{\Gamma(\gamma/\alpha)} S^{\gamma-1} \exp(-\beta S)^\alpha. \quad (4.2.2)$$

При подходящем подборе параметров α , β , γ можно получать различные распределения, рекомендуемые к применению в задачах усталости [20, 53, 54], – такие, как экспоненциальное, полунормальное, Вейбулла, Рэлея и др. При использовании (4.2.2) характеристическое значение долговечности, выраженное в числе циклов до отказа N , принимает вид

$$N = \frac{N_0 S_R^m \Gamma(\gamma/\alpha) \beta^{m/\alpha}}{\Gamma((\gamma + m)\alpha^{-1}, \beta S_{\lim}^\alpha)}, \quad (4.2.3)$$

где обозначения $\Gamma(*)$ и $\Gamma(*,*)$ использованы для полной и неполной гамма-функций.

Выражение (4.2.3) в нашем случае определяет зависимость между случайными величинами: пределом S_R и ресурсом N при стохастическом нагружении рассматриваемого вида и, строго говоря, должно выполняться почти всюду в области определения S_R . Как и в формуле (4.2.1), в соответствии с тремя вариантами возможной рандомизации S_R параметр S_{\lim} , стоящий в знаменателе (4.2.3), также принимает описанные выше три значения.

К сожалению, при рандомизации S_R в силу весьма сложного характера зависимости (4.2.3) не удастся получить аналитических зависимостей для распределений долговечности. Преодолеть данное затруднение возможно, используя предлагаемую ниже вычислительную процедуру определения плотностей распределения для всех трех моделей ИКУ.

4.2.2. Исследование функций характеристического ресурса

Рассмотрим более подробно поведение функций характеристического ресурса при различных параметрах с целью изучения различия плотностей распределения ресурса каждой из предложенных трех моделей.

Пример. В качестве примера расчета усталостной долговечности по этой методике рассмотрим процесс нагружения элемента металлоконструкции в опорах козлового крана, полученный при натурном тензометрировании [13], гистограмма амплитуд которого обработана по методу дождя и аппроксимирована распределением Вейбулла (1.4.11) с параметрами масштаба $c = 67,6$ и формы $b = 2,2$. Усталостные характеристики элемента конструкции возьмем из справочной литературы [54, 74]. Рассматривается сварной элемент с лобовыми и продольными швами с необработанной прокатной поверхностью и обрезанными газовой машинной резкой кромками, имеющий эффективный коэффициент концентрации напряжений $K = 3,5$. Элемент конструкции выполнен из малоуглеродистой стали со средними значениями предела прочности $E\sigma_B = 380$ МПа и предела выносливости (с учетом K) $ES_{-1} = 65$ МПа. Стандартное отклонение предела выносливости рекомендуется брать равным $\sigma_{S_{-1}} = 15$ МПа. Нормативная кривая усталости имеет значения параметров $N_0 = 2 \cdot 10^6$ и $m = 7,5$. Коэффициент чувствительности к асимметрии циклов напряжений принят равным $\psi = 0,2$: при нахождении распределения амплитуд числа циклов использовалось именно это значение ψ в процессе перевода асимметричных циклов нагружения в симметричные.

Характеристическое значение долговечностей (4.2.3) в данном случае примет вид

$$N = \frac{N_0 (S_{-1} / c)^m}{\Gamma(1 + m/b, (S_{\lim} / c)^b)}. \quad (4.2.4)$$

На рис. 4.2.1 изображены в различных масштабах неполные гамма-функции, покрывающие интервал изменения S_{-1} в диапазоне вероятностей 0,99. Графики построены при различных значениях параметра m , определяющего наклон кривых усталости и, в частности, при $m = 7,5$ (рис. 4.2.1, б). На рис. 4.2.2 изображены в обычном (4.2.2, а) и логарифмическом (4.2.2, б) масштабах значения функции (4.2.4) при переменном нижнем значении S_{\lim} , равном текущему значению S_{-1} , и различных значениях m . На рис. 4.2.3 также в двух масштабах для предела выносливости изображены функции (4.2.4):

сплошной линией – при изменяющемся S_{lim} (модель 3) и пунктирной линией – при $S_{lim} = ES_{-1}/2$ (модель 2). Видно, что при достаточно больших значениях нижнего порога параметра S_R^* (предела выносливости) расчет будет производиться в запас, т. е. знаменатель в (4.2.4) не будет увеличивать значения ресурса N при постоянном значении нижнего предела интегрирования.

На рис. 4.2.4 показаны зависимости долговечностей по параметру α при фиксированном значении m .

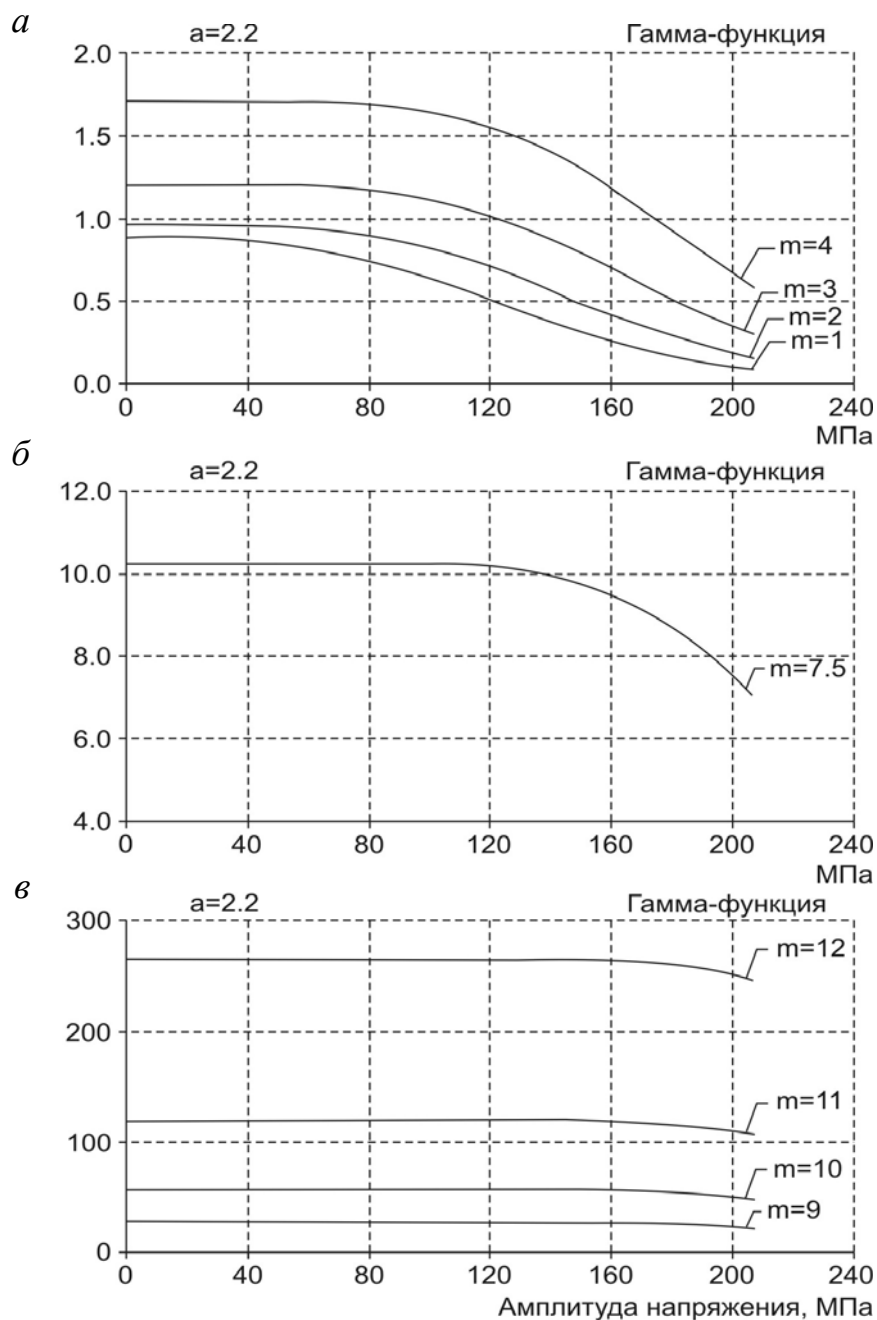


Рис. 4.2.1. Графики гамма-функции при различных m :

$a - m = 1, 2, 3, 4$; $б - m = 7, 5$; $в - m = 9, 10, 11, 12$

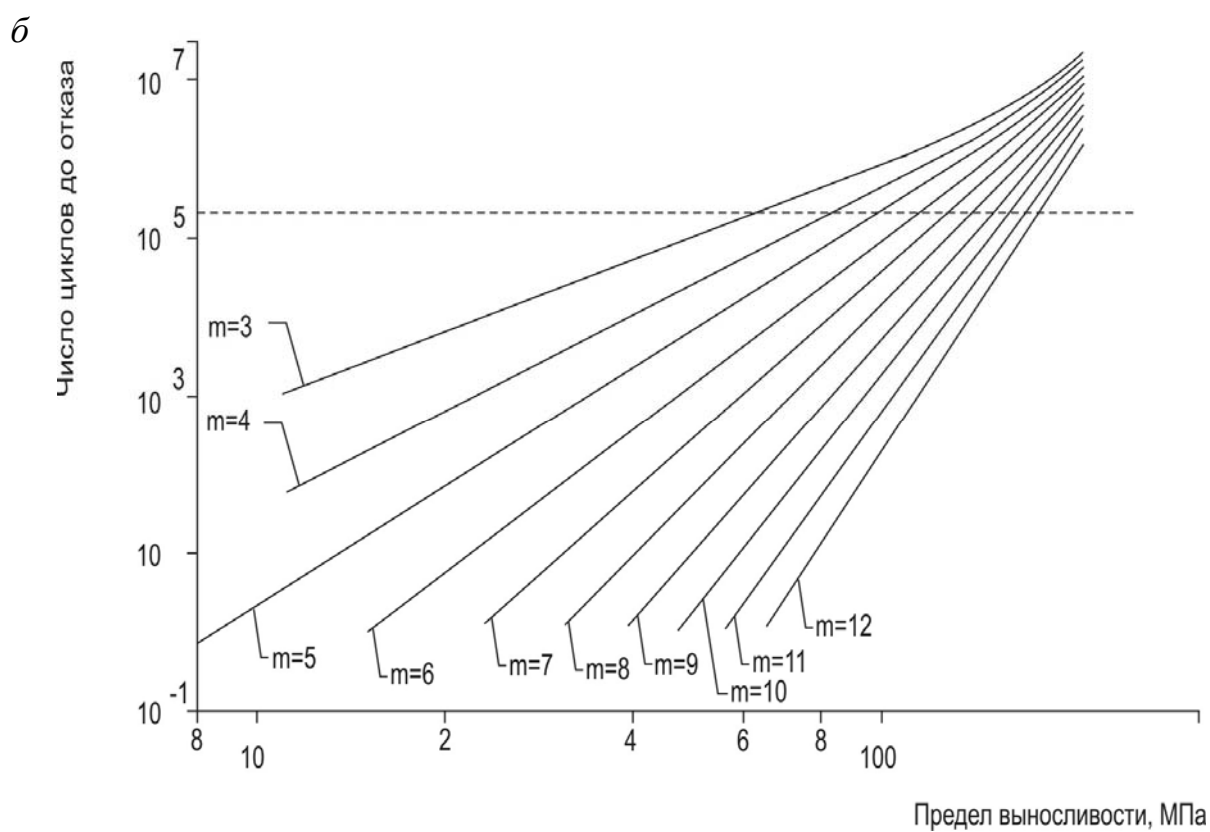
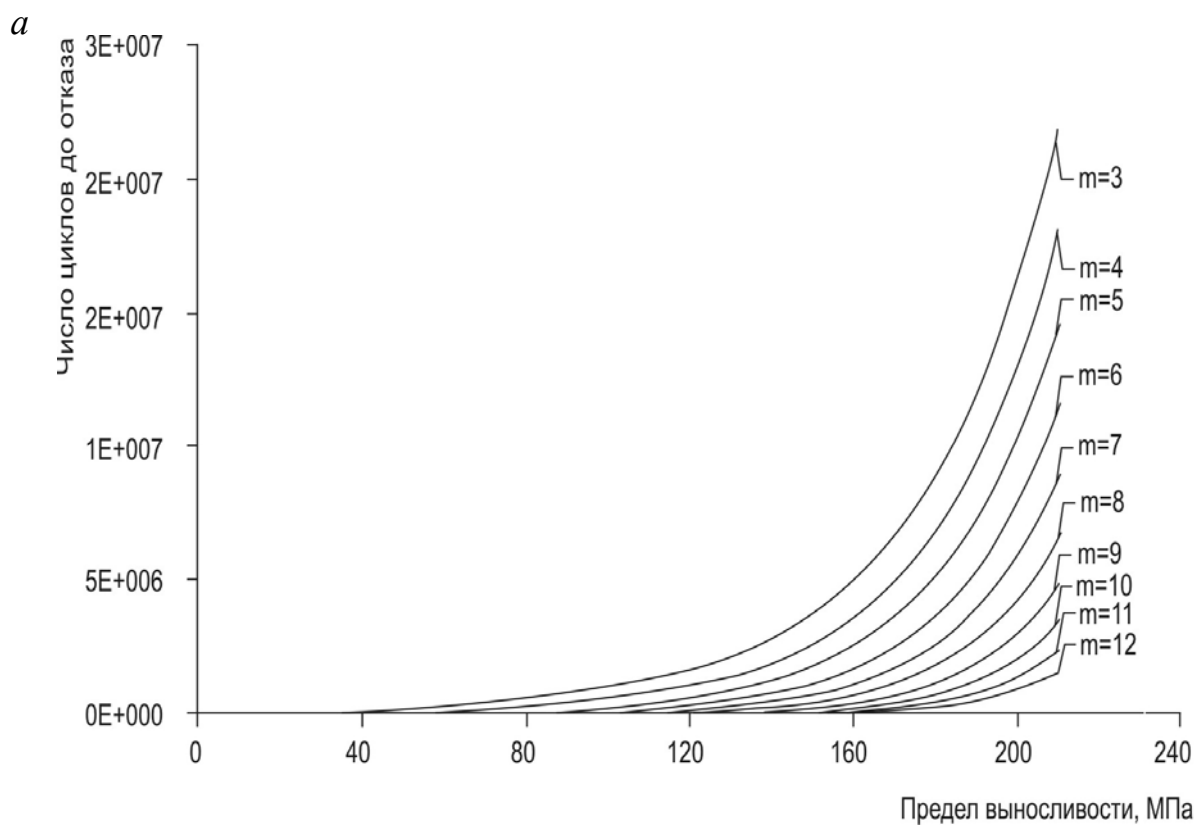


Рис. 4.2.2. Значения характеристического ресурса:
a – линейная шкала; *б* – логарифмическая шкала

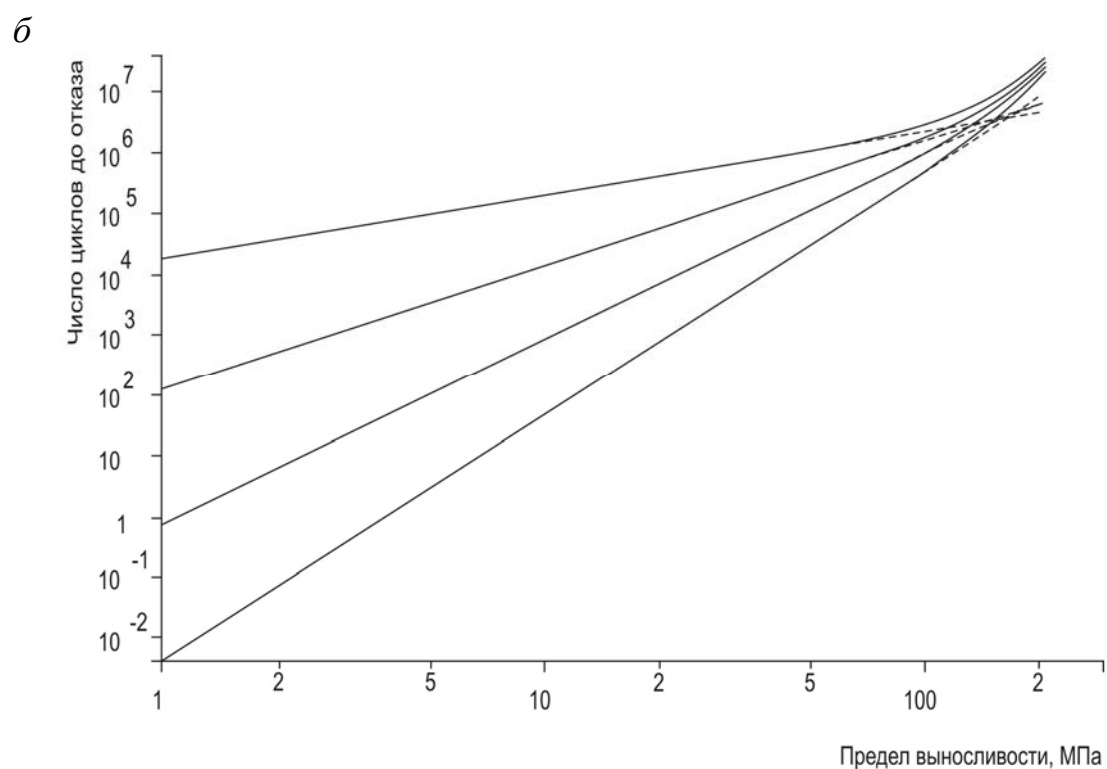
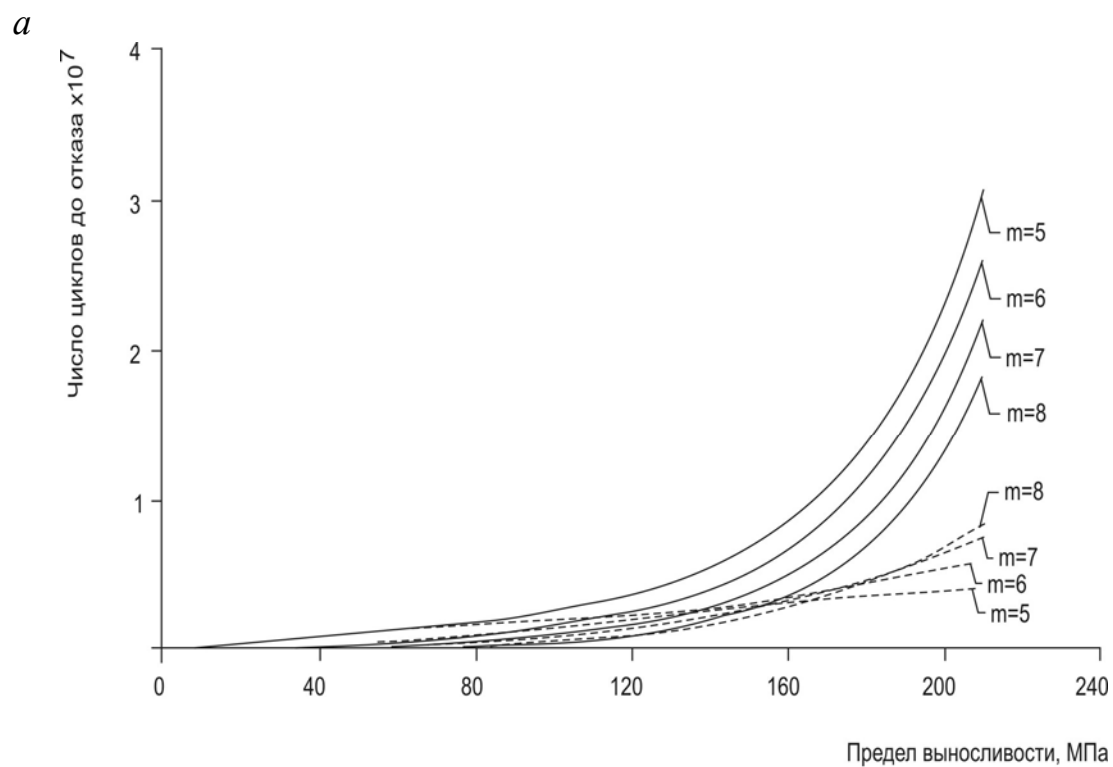


Рис. 4.2.3. Значения ресурса при $\alpha = 2$ по моделям 2 и 3:
a – линейная шкала; *б* – логарифмическая шкала при тех же m

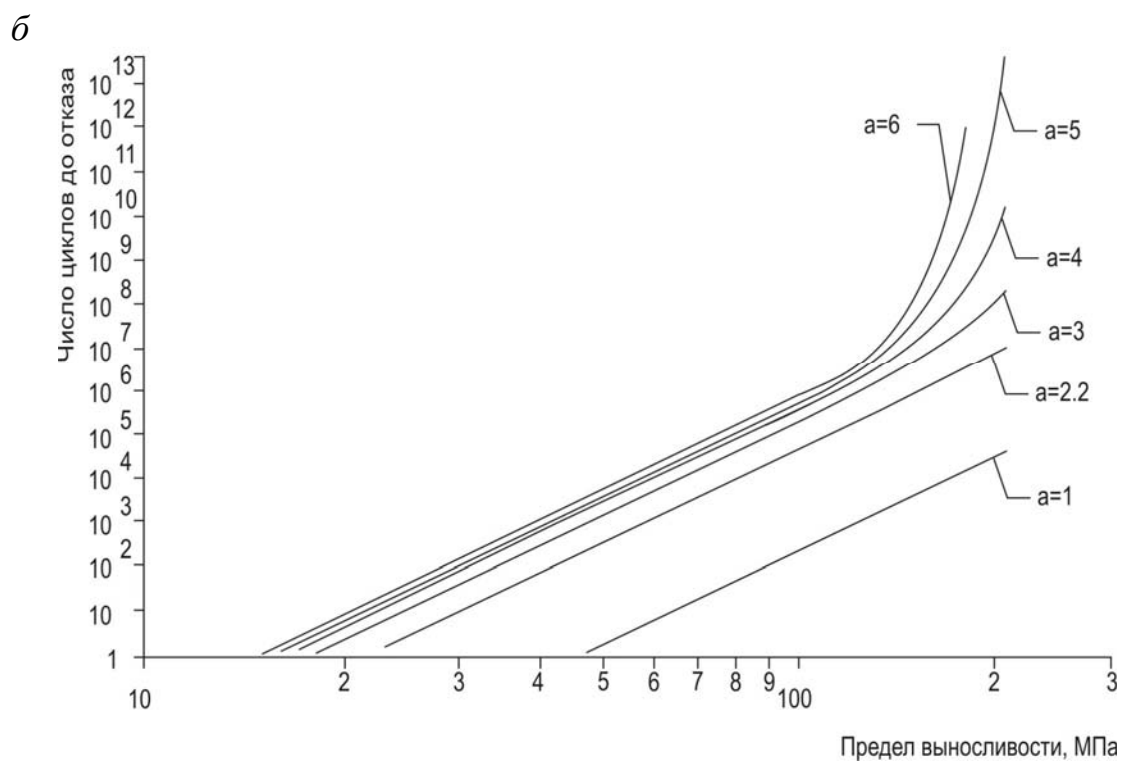
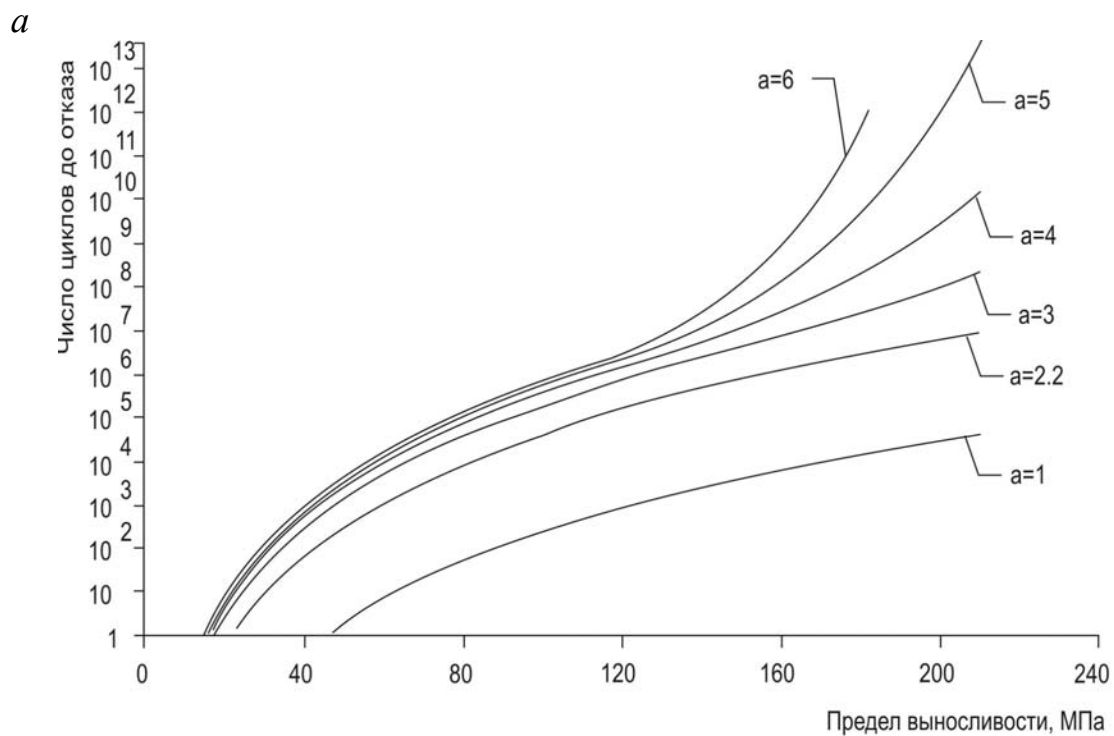


Рис. 4.2.4. Значения характеристического ресурса при фиксированном m :
a – линейная шкала; *б* – логарифмическая шкала

4.2.3. Численный метод нахождения функции распределения ресурса

Рассмотрим численный метод нахождения функции распределения ресурса N по известному распределению предела выносливости (1.4.11) и заданной функции характеристического ресурса (4.2.4). Сперва задается диапазон изменения $S_{-1} \in (0, x^*)$, где x^* находится из уравнения

$$\int_0^{x^*} f(x)dx = \gamma,$$

а γ может быть взято из соображений покрытия интервала изменения S_{-1} с некоторой вероятностью, например, $\gamma = 0,999$. Затем производится дискретизация интервала $(0, x^*)$ на $(k + 1)$ точек так, что получаются равноотстоящие значения $0 = x_0, x_1, \dots, x_k = x^*$, где $x_{i+1} - x_i = x^*/k$, $i = 0, 1, \dots, k - 1$. Используя функцию (4.2.4) и обозначив текущие значения случайной величины N через y , можно для каждого значения x_i при заданных остальных значениях параметров m, b, c, \dots найти соответствующие значения $y(x_i)$ и получить аналогичный ряд значений ресурса y_0, y_1, \dots, y_k .

По полученным значениям x_i вычисляется вероятность того, что предел выносливости S_{-1} не превосходит этих значений:

$$p_i = P\{S_{-1} < x_i\} = \int_0^{x_i} f(x)dx, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Исходя из эквивалентности событий $\{S_{-1} < x_i\}$ и $\{N < y_i\}$ в силу монотонности функции (4.2.4), получаем, что ряд значений вероятностей p_i может быть сопоставлен с распределением $G(y)$ ресурса N как

$$G(y_i) = P\{N < y_i\} = P\{S_{-1} < x_i\} = p_i, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Дискретный аналог соответствующей плотности распределения $g(y)$ ресурса может быть найден как

$$g(y_i) = (p_i - p_{i-1})/(y_i - y_{i-1}), \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

На рис. 4.2.5, а изображены сплошными линиями характеристические функции N для модели 3 и модели 2. Для большего понимания примера пунктирной линией изображается степенная аппроксимация для мо-

дели 3. Рис. 4.2.5, б отражает различие между плотностями распределения долговечностей, рассчитанных для модели 1 и модели 3.

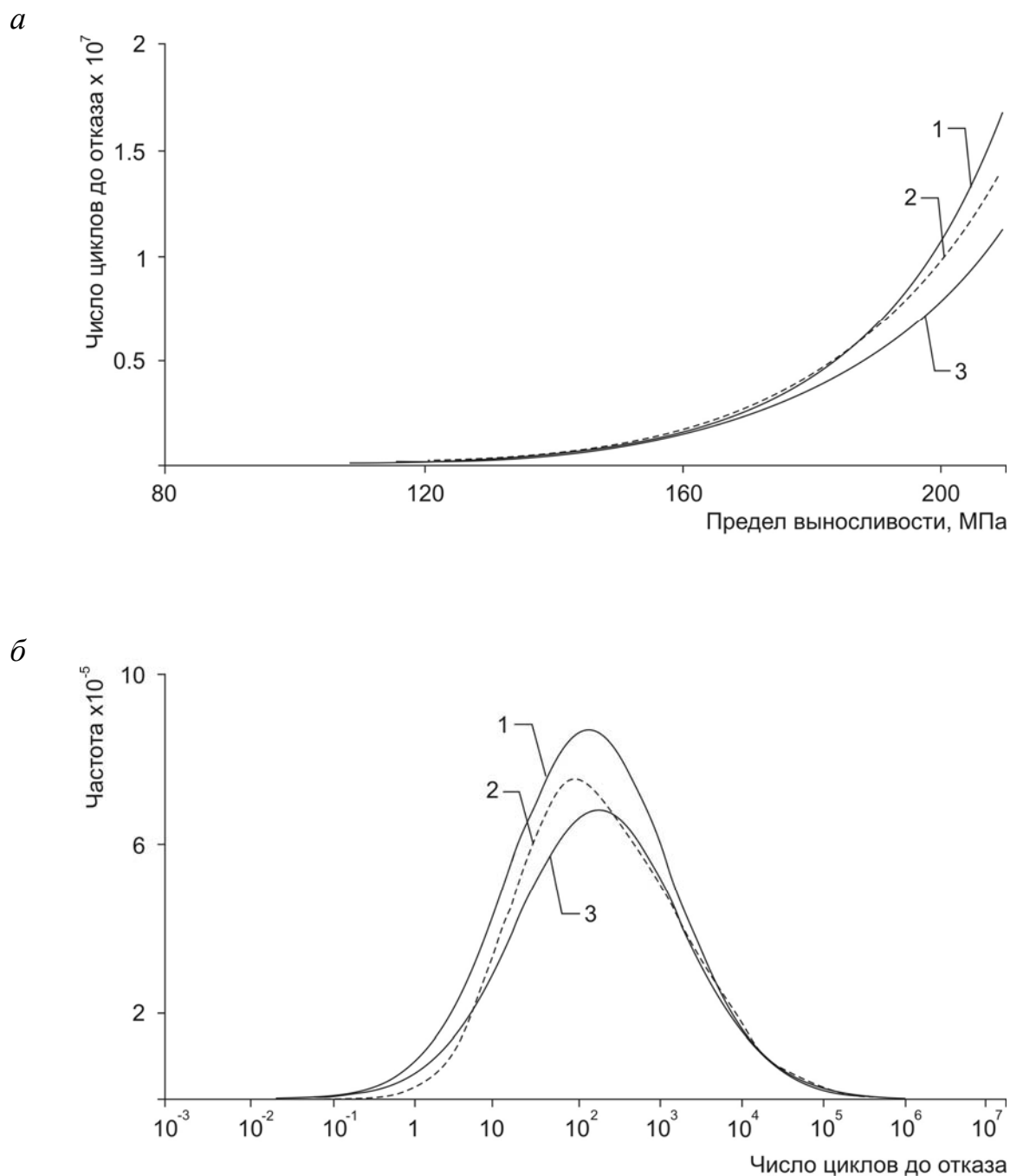


Рис. 4.2.5. Значения:

а – характеристический ресурс; *б* – распределение ресурса; 1 – кривые модели 3;
2 – кривые степенной аппроксимации модели 3; 3 – кривые модели 2

Отметим, что для модели 3 необходимо выполняется ограничение справа диапазона возможного изменения случайной величины N значением N_0 . Если же плотность распределения сместится вниз по оси S (т. е. ам-

плитуды нагружения будут меньше, чем в рассматриваемом случае), то плотность распределения N сместится вправо, ограниченность распределения $f_4(y)$ будет проявляться более явно и ее отличие от $f_1(y)$ станет более разительным.

В заключение добавим также, что рассмотренный метод, по сути, есть реализация уравнения (4.1.11), но только сразу для множества значений ресурса, а не для значений повреждения.

4.3. Прогнозирование остаточного ресурса

Поиск функций распределения остаточного ресурса также основывается на фундаментальном предположении о наличии у каждого образца своей ИКУ и, кроме того, на апостериорной информации о том, что к моменту прогнозирования при данной истории нагружения h исследуемого образца его разрушения не произошло. Тогда, если точно известна предшествовавшая история нагружения, то можно выделить во всем пространстве ИКУ множество кривых, не реализовавшихся при данной истории нагружения, а значит, и вычислить апостериорные распределения значений ресурса.

В случае регулярного и стационарного стохастического нагружения функция распределения остаточного ресурса получается очень просто: из аналитических плотностей распределения ресурса $f_i(y)$, $i = 1, 3, 4$, и $g(y)$ вычислительным методом. Для этого надо вычесть из случайной величины N , определяемой одним из этих распределений, константу – число реализовавшихся регулярных либо приведенных циклов нагружения n , и учесть, что к моменту прогнозирования отказа не произошло.

Рассмотрим более подробно случай двухступенчатого нагружения: сначала образец нагружается в течение n_1 циклов с амплитудой S_1 , а затем доводится до разрушения при нагружении с амплитудой S_2 . При детерминированном варианте прогнозирования остаточный ресурс N_{res} определяется посредством соотношения

$$N_{res} = N_2(1 - n_1/N_1).$$

Вспомнив теперь, что $N_1 = N(S_1)$ и $N_2 = N(S_2)$ – на самом деле случайные величины, определяющие ресурс при соответствующем регулярном нагружении, хотя и определяемые одной и той же случайной величиной S_R , и что это равенство должно выполняться почти наверное (при отказе повреждение должно быть равно 1 для каждой ИКУ за исключением множества меры 0),

собственно, и приходим к решению задачи стохастического прогнозирования ресурса при двухступенчатом нагружении. Легко устанавливается с помощью (4.1.11) равенство по вероятности следующих событий:

$$P\{N(S_1)\} > n_1 = P\{S_R > a\}, \text{ где } a = S(n_1/N_0)^{1/m}, \quad (4.3.1)$$

откуда получается соответствующее выражение для случайной величины остаточного ресурса:

$$N_{res} = N(S_2) - b, \text{ где } b = n_1(S_1/S_2)^m. \quad (4.3.2)$$

Используя равенства (4.3.1–4.3.2), получаем распределение ресурса, выраженное через распределение случайной величины $N(S_2)$:

$$P\{N_{res} < y\} = P\{N(S_2) < b + y | N(S_2) > b\} = P\{N(S_2) < b + y\} / P\{N(S_2) > b\}. \quad (4.3.3)$$

Дополнительно отметим, что для многоступенчатого нагружения константа b примет вид

$$b = \sum_{i=1}^{j-1} n_i (S_i / S_j)^m.$$

В случае нестационарного нагружения с более сложной историей нагружения потребуются, конечно, более трудоемкая процедура вычисления распределений остаточного ресурса с привлечением распределений величины накопленного повреждения, как это было сделано в п. 2.2.4. Пока же нам удалось получить требуемые характеристики, не используя в явном виде зависимости для определения повреждения и его распределений.

4.4. Экспериментальная проверка достоверности моделей

Для оценки достоверности предлагаемых моделей усталостного накопления повреждений при нерегулярном нагружении необходимы проведение специализированных статистических экспериментов и использование статистических критериев с целью проверки получаемых выборок значений остаточной долговечности на адекватность описания используемых распределений с помощью соотношения (4.2.7), в частности, и при двухступенчатом нагружении. Обратимся к доступным литературным источникам и отметим сразу, что качественные статистические эксперименты с достаточно представительными выборками остаточной долговечности найти непросто. Однако все же оказалось возможным провести оценку качества

предлагаемых моделей усталостного повреждения и на небольшом статистическом материале [105, 128].

4.4.1. Данные Рихарта – Ньюмарка

В работе Ф. Рихарта и Н. Ньюмарка [128] рассматривается ряд экспериментов с определением остаточного ресурса образцов при двухступенчатом нагружении с амплитудами предварительного S_1 и тестового S_2 циклирования. Исходной информацией для построения изучаемых моделей служит средняя кривая усталости в полулогарифмических координатах для плоских образцов из стали А7, испытывавшихся на осевое циклическое растяжение:

$$\log EN(S) = \log N_0 + m(S_R - S), \quad (4.4.1)$$

где известно, что $m = 1,045 \cdot 10^{-4}$, а параметры S_R и N_0 не заданы и ими можно распорядиться по своему усмотрению. Малое количество экспериментов, проведенных при определении кривой усталости, привело к необходимости межгрупповой оценки стандарта долговечностей s_N , который можно принять равным в пределах 0,1–0,2. Нижняя граница S_R для данных образцов Рихартом и Ньюмарком также не определялась [128].

Зададим теперь ИКУ по модели 1 в виде

$$N(S) = N_0 10^{m(S_R - S)}, \quad (4.4.2)$$

где S_R имеет теперь уже нормальное распределение, $N(S)$ – соответственно, логнормальное распределение, а константа N_0 определяется с учетом различия между логарифмом среднего значения и средним значением логарифмов для долговечностей в соответствии с (4.1.1–4.1.3). Тогда, если в обратном порядке задаться значением $N_0 = 10^7$ и, например, стандартным отклонением $s_N = 0,14$, то по средней кривой (4.4.1) находится среднее значение параметра

$$m_R = ES_R = 16934, \quad (4.4.3)$$

а по (4.1.5) определяется стандартное отклонение s_R параметра S_R как

$$s_R = 1339. \quad (4.4.4)$$

Таким образом заданы все параметры распределений случайных величин S_R и $N(S)$.

Проверка адекватности описания рассеяния долговечностей с помощью распределения остаточного ресурса (4.2.7) при использовании лог-нормального распределения не имеет смысла, поскольку самое большее число повторяющихся экспериментов при фиксированных S_1 и S_2 не превышает четырех и говорить о каких-либо статистических выводах нет возможности. Однако у нас имеется основное соотношение для определения остаточного ресурса (4.2.6), поэтому следует воспользоваться линейными свойствами модели накопления повреждений и врожденностью (индивидуальностью) усталостных свойств образцов следующим образом.

Каждая ИКУ порождает целое семейство линий накопления повреждений, две из которых изображены на рис. 4.4.1. Естественно, эти линии имеют гипотетический характер – какие именно две линии соответствуют каждому образцу при двухуровневом нагружении, мы не знаем. Однако, в силу исходных предположений, положенных в основу данных моделей, нам известно, что каждому образцу соответствует некоторое значение параметра S_R , по которому можно было бы однозначно определить значения $N(S_1)$, $N(S_2)$ и N_{res} , а значит, и линии накопления повреждений (см. рис. 4.4.1).

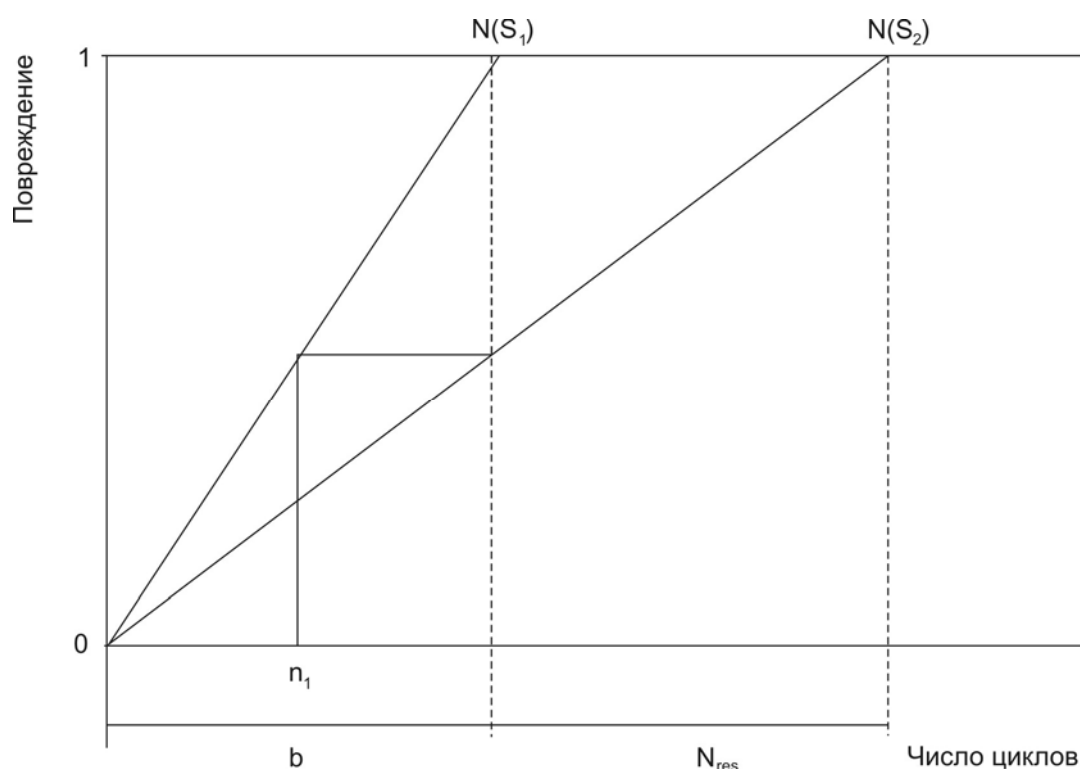


Рис. 4.4.1. Свойство параллельного перехода с одной линии накопления повреждений на другую

Для данной модели ИКУ и режима нагружения b определяется как $b = n_1 10^{m(S_1 - S_2)}$, что является числом циклов нагружения при амплитуде S_2 , эквивалентным по вносимому повреждению нагружением в течение n_1 числа циклов на амплитуде прециклирования S_1 . На рис. 4.4.1 показано это свойство параллельного перехода с одной линии накопления повреждений на другую. Далее, зная выборочное значение долговечности для каждого образца, которое складывается из заданного числа n_1 предварительного циклирования и значений остаточной долговечности N_{res} , можно восстановить выборочное значение долговечностей $N(S_2)$ при амплитуде нагружения S_2 . Для этого следует воспользоваться суммой значений b и N_{res} , полученных в двухступенчатых испытаниях и, наконец, сравнить эти восстановленные значения $N(S_2)$ для каждого эксперимента с исходными выборками долговечностей при этих же амплитудах, по которым строилась средняя кривая усталости, используя равенство

$$N(S_2) = b + N_{res}, \quad (4.4.5)$$

тем самым как бы производя одноступенчатое нагружение.

В табл. 4.4.1 приведены средние значения и стандартные отклонения, полученные по модели: \overline{N}^* , s_N^* и из исходных экспериментов: \overline{N}^\wedge , s_N^\wedge (1000 psi = 6,895 МПа).

Таблица 4.4.1

Средние значения и стандартные отклонения

psi	Число образцов	Модель		Эксперимент		Кривая усталости, N
		\overline{N}^*	s_N^*	\overline{N}^\wedge	s_N^\wedge	
32000	14	219021	73989	264460	41393	265000
34500	8	156500	65820	—	—	146000
37000	10	103016	39334	68850	3077	80000

Некоторая неудача с полученными оценками статистических характеристик, возможно, объясняется всего лишь малой величиной выборок. Проведем дополнительную оценку качества модели, используя уже всю выборку в 32 значения остаточной долговечности, полученные при различных режимах нагружения. Идея заключается в том, что S_R должен иметь нормальное распределение с параметрами m_R и s_R . Подставляя (4.4.5) в (4.4.2) и находя обратную функцию к (4.4.2), получим выражение для

статистической связи параметра S_R через $N(S_2)$. Затем, подставив все 32 экспериментальных значения остаточной долговечности N_{res} в (4.4.5), получим такое же число выборочных значений параметра S_R .

Итак, найдя по средней кривой усталости среднее значение m_R и задавшись некоторым стандартным отклонением s_R , следует сравнить их со статистическими характеристиками выборки, полученной в результате использования модели, как это описано выше. В результате чего получаются среднее значение выборки и стандартное отклонение:

$$m_R^* = 17026, s_R^* = 1293.$$

Варьируя значения s_N , можно добиться таких же близких значений средних значений и еще более близких значений стандартного отклонения. На нормальной вероятностной бумаге (рис. 4.4.2) нанесены выборочные значения параметра S_R и хорошо видно, что нормальное распределение не совсем подходит к описанию этих данных.

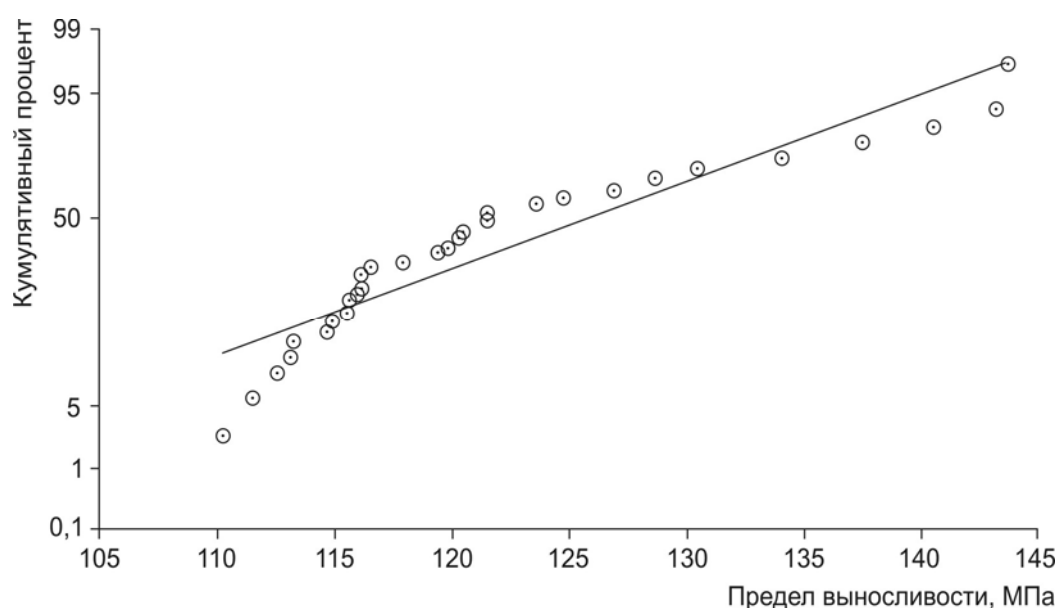


Рис. 4.4.2. Аппроксимация нормальным распределением значений пределов выносливости по данным Рихарта – Ньюмана (эксперимент 1)

Рассмотрим еще одну серию экспериментов с двухступенчатым осевым нагружением небольших образцов, также изготовленных из стали А7 [128]. Кривая усталости имеет тот же самый вид (4.4.2); оценки параметров таковы: $m = 1,18 \cdot 10^{-4}$, $N_0 = 10^6$, $s_N = 0,17$, $m_R = 45197$, $s_R = 1439$.

В табл. 4.4.2 приведены расчетные и экспериментальные значения статистических характеристик долговечности, которые можно было получить по этим экспериментам при двухступенчатом нагружении данного типа образцов ($1000 \text{ psi} = 6,895 \text{ МПа}$). Число образцов, испытывавших идентичный режим нагружения, в этой серии экспериментов еще меньше, поэтому приводятся оценки только средних значений $N(S_2)$. Также оценивалось распределение параметра S_R , среднее значение и стандартное отклонение которого получились равными $m_R^* = 36442$, $s_R^* = 1403$. Проверка на нормальность приведена на рис. 4.4.3.

Таблица 4.4.2

Сравнение результатов расчета по модели
с экспериментальными значениями

psi	Число образцов	Модель	Кривая усталости
		\overline{N}^*	\overline{N}
45000	14	733726	1000000
53000	4	156500	450000
56000	5	64080	52000

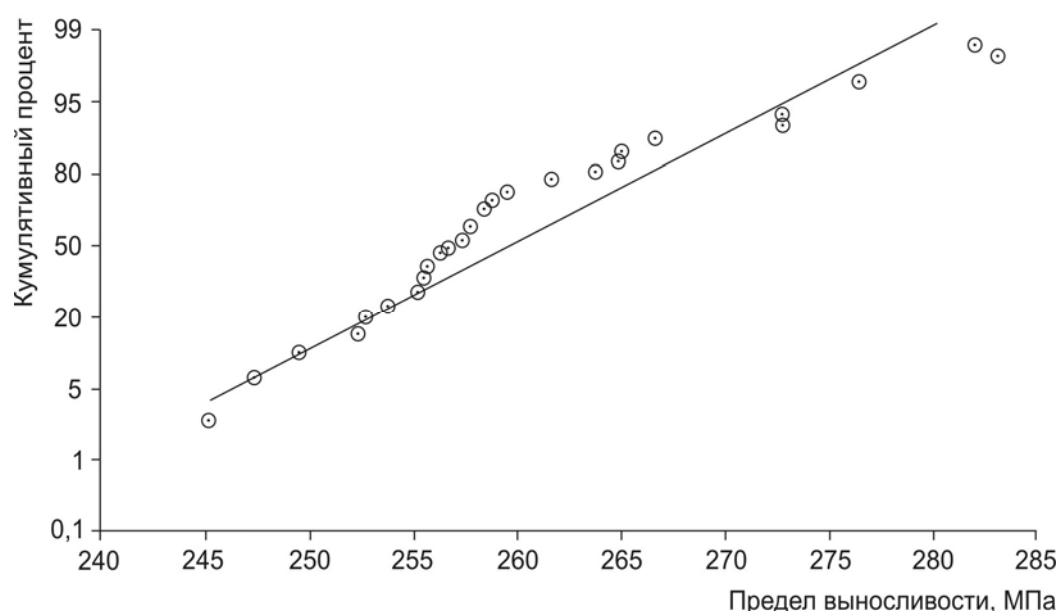


Рис. 4.4.3. Аппроксимация нормальным распределением значений пределов выносливости по данным Рихарта – Ньюмана (эксперимент 2)

4.4.2. Данные Долана – Брауна

В работе Т. Долана и Г. Брауна также рассматривается двухступенчатое нагружение и приведены более подробные и представительные данные по остаточным значениям долговечностей [105]. Образцы из алюминиевого сплава 75S-T подвергались знакопеременному изгибу с нулевым средним значением, в частности, при $S_1 = 40000$ psi, $S_2 = 35000$ psi. Соответствующие средние значения и стандартные отклонения долговечностей приведены равными $m_1^{\wedge} = 320000$, $m_2^{\wedge} = 1677000$, $s_1^{\wedge} = 255000$ и $s_2^{\wedge} = 846000$ циклов.

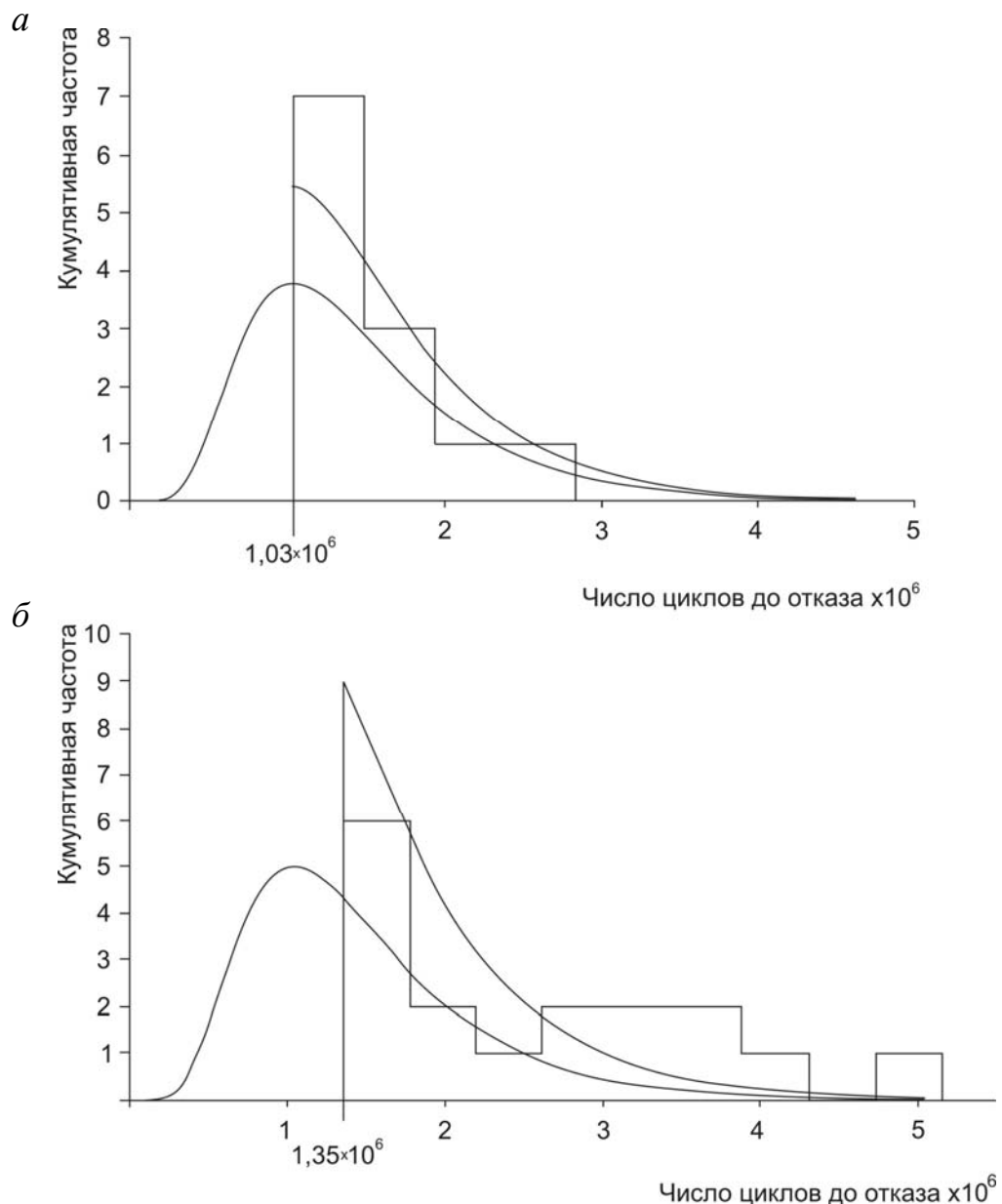


Рис. 4.4.4. Аппроксимация остаточного ресурса логнормальным распределением (данные Долана – Брауна):

а – при $n = 1,03 \times 10^6$; *б* – при $n = 1,35 \times 10^6$

Средняя кривая усталости хорошо аппроксимируется прямой линией в двойных логарифмических координатах с коэффициентом наклона $m = 12,1$.

Попытаемся теперь проверить адекватность моделей с применением формулы (4.3.2). Распределение остаточного ресурса по данному двухступенчатому эксперименту должно совпадать с усеченным слева логнормальным распределением, если справедлива одна из моделей, предлагаемых к обсуждению.

В соответствии с (4.3.2) получаем значение b при амплитуде прециклирования S_1 и тестового циклирования S_2 : $b = 1,35 \cdot 10^6$. Затем воспользуемся наиболее представительными экспериментами при 85 % и 65 % средней долговечности m_1^{\wedge} [105].

На рис. 4.4.4 приведены гистограммы оценок остаточных долговечностей и кривые исходных и усеченных (модельных) плотностей распределения. Проверка по критерию χ^2 как для модели 1, так и для модели 3 дает уровень значимости, меньший 0,01, хотя для модели 3, имеющей усечение как слева, так и справа, значения χ^2 получаются несколько меньшими. Использование критерия Колмогорова – Смирнова также дает похожие результаты.

4.5. Сравнение расчетов по предлагаемым моделям с известными методиками

Представленная выше статистическая проверка адекватности моделей по экспериментальным данным для трех типов образцов показала их достаточную степень достоверности. Вместе с тем, ограниченность в выборе историй нагружения не дает представления о том, как будут работать эти модели при расчетах реальных элементов МС при воздействии на них различных стохастических историй нагружения. Поэтому следует сравнить предлагаемый метод расчета ресурса элементов с известными, хорошо зарекомендовавшими себя методиками расчетов на усталостную долговечность.

4.5.1. Сварной узел путевой машины

1. В работе В. П. Когаева и Ю. Н. Дроздова [35] и МУ РД 50-694-90 [54] предложен пример расчета функции распределения усталостной долговечности сварного узла несущей системы путевой машины, представляющего собой тавровое соединение продольной балки с вертикальной стойкой.

Соединение выполнено угловыми швами с обваркой по контуру без предварительной разделки кромок. Балка и стойка имеют коробчатое сечение и сварены каждая из двух швеллеров продольными стыковыми швами.

2. Номинальные переменные напряжения, возникающие в балке вблизи сварного углового шва, определялись тензометрированием в условиях эксплуатации. В табл. 4.5.1 представлены числа циклов нагружения ν_i , соответствующие выделенным с помощью метода полных циклов амплитудам нагружения S_i , где обозначено $p_i = \nu_i / \nu$, а ν – общее число циклов нагружения за один блок нагружения, равное 400 циклам.

Таблица 4.5.1

Число циклов нагружения по интервалам разбиения

Номер интервала	S_i , МПа	ν_i	p_i
1	46,7	3	0,075
2	43,6	2	0,005
3	40,9	8	0,02
4	37,2	14	0,035
5	36,1	20	0,05
6	32	17	0,042
7	29,4	17	0,042
8	26,2	10	0,025
9	23,6	4	0,01
10	20,5	30	0,075
11	17,3	15	0,037
12	14,7	23	0,057
13	11,6	144	0,036
14	8,9	51	0,127
15	5,8	31	0,077
16	3,1	11	0,027

Кроме того, известно, что рассматриваемый сварной узел испытывает суммарное число $N_{total} = 4 \cdot 10^6$ циклов нагружения.

3. Параметры кривой усталости выбираются следующим образом: конструкция данного сварного узла сопоставляется со схемами сварных узлов, разделенных по конструктивным признакам на 8 основных групп, и делается вывод о том, что этот узел относится к 5-й группе (учитывая отсутствие разделки кромок под сварку и большую концентрацию напряжений в соединениях в тавр).

Для данных конструкционной стали и типа соединения рекомендуется использовать значения предела выносливости $S_{-1} = 23$ МПа, но учитывая натурные усталостные испытания узла, рекомендуется воспользоваться средним значением $ES_{-1} = 22,5$ МПа и стандартным отклонением $\sigma_{S_{-1}} = 2,25$ МПа [54]. Показатель угла наклона кривой в двойных логарифмических координатах принимается равным $m = 5$, а точка перелома кривой усталости $N_0 = 6 \cdot 10^6$ циклов.

4. Накапливаемое повреждение за один блок нагружения составляет ν единичных повреждений μ , значит, за один блок нагружения накапливается повреждение

$$\mu_b = \nu \sum_i \frac{P_i}{N(S_i)} = \nu \sum_i \frac{P_i}{N_0 (S_{-1}/S_i)^m}. \quad (4.5.1)$$

Тогда число блоков нагружения N_b есть случайная величина, определяемая как

$$N_b = 1/\mu_b = a(S_{-1})^m, \quad (4.5.2)$$

где коэффициент

$$a = \frac{N_0}{\nu \sum_i P_i (S_i)^m}. \quad (4.5.3)$$

Поскольку медианная кривая усталости задана в двойных логарифмических координатах и известны среднее и стандартное отклонение предела выносливости, то можно воспользоваться какой-либо из моделей, рассмотренных ранее, например, моделью 1.

5. В этом случае нам известно, что предел выносливости имеет логнормальное распределение (см. (4.1.3)) с параметрами $m_R = 1,35$ и $s_R = 0,04$. Тогда в соответствии с (4.1.5) уравнение (4.5.2) даст следующую зависимость для параметров логнормального распределения, выраженного в числе блоков нагружения:

$$s_N = ms_R, \quad m_N = \log a + mm_R, \quad (4.5.4)$$

откуда получается $s_N = 0,22$, $m_N = 3,8$, что дает по формуле (4.1.4) среднее значение долговечностей $EN_b = 7080$ блоков нагружения, равное 573480 рабочим циклам.

Так как каждый блок нагружения содержит ν циклов нагружения, имеем ожидаемую долговечность $EN_c = \nu EN_b = 2,83 \cdot 10^6$ циклов нагружения. При сравнении с известной, полученной экспериментально, средней дол-

говечностью за срок службы сварного узла $N_{sum} = 4 \cdot 10^6$, видим, что полученное выше значение долговечности гораздо ближе к известному, чем вычисленное В. П. Когаевым и Ю. Н. Дроздовым [35] значение медианной долговечности 141000 рабочих циклов, которое соответствует $0,7 \cdot 10^6$ циклов нагружения в силу соотношения 400 циклов нагружения ≈ 81 рабочему циклу за блок нагружения.

Найденное логнормальное распределение долговечностей с параметрами m_N и s_N изображено на рис. 4.5.1.

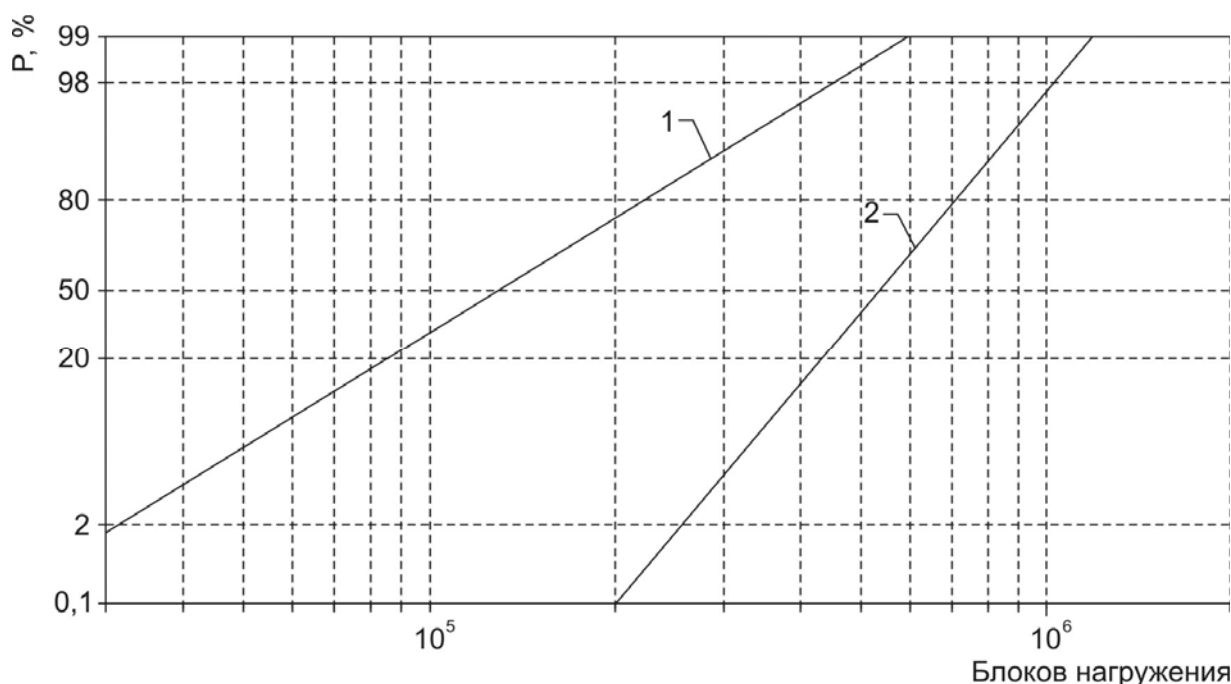


Рис. 4.5.1. Распределение долговечностей с параметрами m_N и s_N :

1 – вычисленное В. П. Когаевым и Ю. Н. Дроздовым [35]; 2 – найденное по модели 1

4.5.2. Вал редуктора механизма поворота портального крана

1. В уже не раз упомянутой выше работе В. П. Когаева и Ю. Н. Дроздова «Прочность и износостойкость деталей машин» [35] рассматривается пример расчета функции распределения усталостной долговечности вала редуктора механизма поворота портального крана, изготовленного из стали 45. Вал укреплен в четырех подшипниках качения и представляет собой дважды статически неопределимую систему. Вал подвергался тензометрированию в условиях эксплуатации; датчики были наклеены в средней части вала между средними подшипниками. Построение эпюр изгибающих моментов и вычисление амплитуд нормальных напряжений от изгиба, а также данные тензометрирования

показали, что эти напряжения весьма малы и их можно не учитывать при оценке накопления усталостных повреждений. Усталостная прочность вала определяется, в основном, амплитудами касательных напряжений от кручения, которые имеют максимальное значение в месте посадки правой шестерни на шлицевое сечение вала с прямобочными шлицами.

2. В качестве блока нагружения выбраны одни сутки. Общее число циклов в блоке $\nu = 6474$ цикла. В табл. 4.5.2 представлены числа циклов нагружения ν_i , соответствующие выделенным с помощью метода полных циклов амплитудам нагружения S_i .

Таблица 4.5.2

Число циклов нагружения, выделенных методом полных циклов

Номер интервала	S_i , МПа	ν_i	p_i
1	85	75	0,012
2	77	107	0,016
3	69	64	0,01
4	61	190	0,03
5	58	44	0,007
6	45	80	0,012
7	37	269	0,04
8	29	557	0,09
9	21	1482	0,23
10	13	3606	0,56

3. Предел выносливости на кручение данной стали $S_{-1} = 193$ МПа [35]. Коэффициент концентрации напряжений, характеризующий влияние концентрации напряжений, масштабного фактора и качества обработки поверхностей на значение предела выносливости вала с прямобочными шлицами, равняется при кручении $K = 3,67$, а при изгибе $K = 4,96$, что дает значения предела выносливости при кручении и при изгибе, соответственно, равные 52,6 и 70,6 МПа. Стандартное отклонение, если принять коэффициент вариации 0,1, получается 5,26 МПа. Параметры кривой усталости в двойных логарифмических координатах – $m = 3,5$ и $N_0 = 2 \cdot 10^6$.

4. Решение подобно рассмотренному выше.

5. Аналогично предыдущему случаю (4.1.5) дает значения параметров логнормального распределения $m_R = 1,72$ и $s_R = 0,04$. Тогда из (4.5.4) получаем параметры распределения долговечностей $m_N = 3,08$ и $s_N = 0,15$ (коэффициент $a = 1,2 \cdot 10^{-3}$), что дает ожидаемое число блоков – суток ра-

боты portalного крана до появления усталостных повреждений вала: $EN_b = 1277$. Полученная средняя долговечность 1277 суток отличается от приведенной в работе В. П. Когаева и Ю. Н. Дроздова [35] расчетной медианной долговечности, равной 500 суткам, примерно в 2,5 раза (рис. 4.5.2). К сожалению, точных экспериментальных сведений о действительной долговечности в книге «Прочность и износостойкость деталей машин» [35] не содержится. На рис. 4.5.2 видно, что в этой работе найдено совсем не логнормальное распределение, хотя из всех предпосылок должен быть найден именно этот тип распределения.

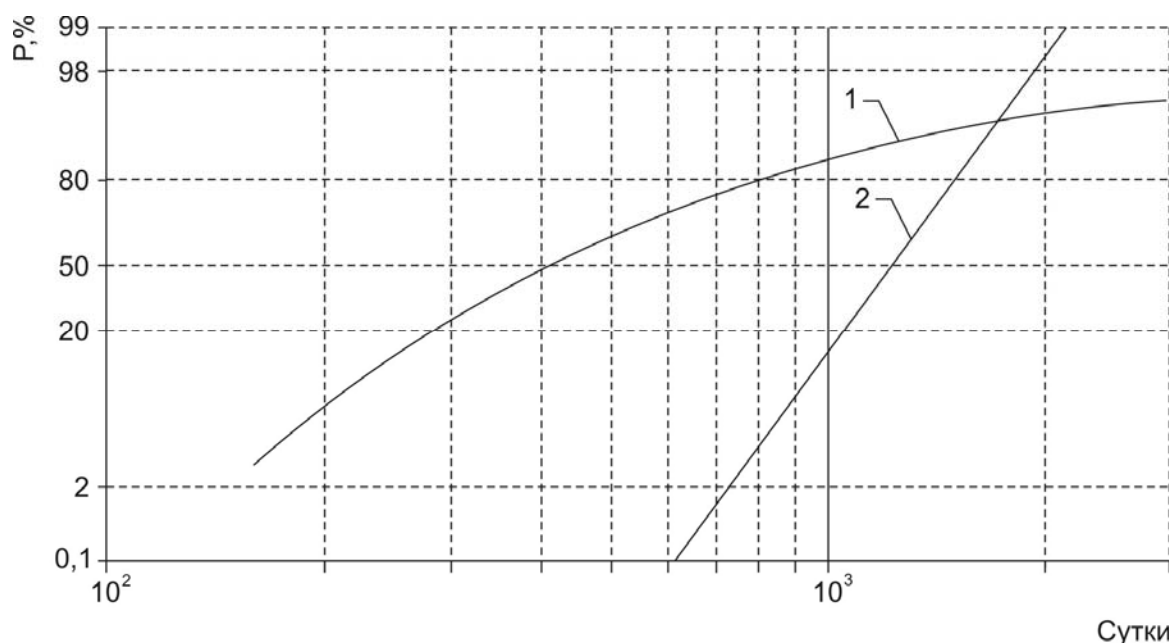


Рис. 4.5.2. Распределение ресурса для вала редуктора:
1 – по расчетам В. П. Когаева и Ю. Н. Дроздова [35], 2 – найденное нами

4.5.3. Приводной вал механизма передвижения напольной завалочной машины

1. В. М. Гребеник и В. Л. Цапко в своей работе [21] приводят оценку усталостной долговечности трансмиссионного вала механизма передвижения напольной завалочной машины грузоподъемностью 7,5 т мартеновского цеха.

2. При осциллографировании напряжений и обработке хронометражных данных установлено, что действующие напряжения могут превышать предел выносливости в течение достаточно длительного суммарного времени за год. Гистограмма действующих напряжений за год приведена

в табл. 4.5.3. Блок нагружения за один месяц составляет $\nu = 2 \cdot 10^4$ циклов нагружения.

Таблица 4.5.3

Число циклов нагружения по интервалам разбиения для напольной завалочной машины

Номер интервала	S_i , МПа	ν_i	p_i
1	200	6000	0,3
2	150	6000	0,3
3	100	8000	0,4

3. Вал изготовлен из стали 45 с пределом выносливости 300 Н/мм^2 , а с учетом коэффициента концентрации напряжений $K = 2,2 / 0,65$ действительное среднее значение предела выносливости $ES_{-1} = 89 \text{ Н/мм}^2$. Примем, как и в предыдущих примерах, коэффициент вариации равный 0,1, что дает стандартное отклонение $\sigma_{S_{-1}} = 8,9 \text{ Н/мм}^2$. Кривая усталости задается в этом примере, в отличие от предыдущих двух, в полулогарифмических координатах вида (4.4.2) с показателем наклона $m = 1,75$ и точкой перелома $N_0 = 10^6$ циклов.

4. В данном случае разумно предположить, что предел выносливости имеет нормальное распределение, а соответствующее распределение долговечностей тогда относится к логнормальному типу. Соотношение между параметрами распределения случайной величины S_{-1} , имеющими смысл среднего значения и стандартного отклонения $m_R = \bar{Y}S_{-1}$ и $s_R = \sigma_{S_{-1}}$, и параметрами распределения долговечностей получается аналогичным соотношению (4.5.4). Следует только помнить, что в данном случае это соотношение связывает нормальное распределение с логнормальным, а не логнормальное с логнормальным.

Поступим сейчас несколько иначе: не будем вычислять повреждение за блок нагружения, а найдем единичное повреждение.

Итак, равенство (4.5.1) принимает вид

$$\mu = \sum_i \frac{P_i}{N(S_i)} = \sum_i \frac{P_i}{N_0 10^{m(S_{-1}-S_i)}}. \quad (4.5.5)$$

Число циклов нагружения, соответствующее этому единичному повреждению, назовем, как это принято в детерминированных расчетах, эквивалентной долговечностью N_e , для которой можно получить следующую зависимость:

$$N_e = 1/\mu = N_0 10^{mS_{-1}} / b, \quad (4.5.6)$$

где коэффициент $b = \sum_i p_i 10^{mS_i} = 178$.

Поэтому, если ввести эквивалентное нагружение S_e , соответствующее случайной долговечности N_e , и потребовать, чтобы (4.5.6) приняло вид

$$N_e = N_0 10^{m(S_{-1} - S_e)}, \quad (4.5.7)$$

то это эквивалентное нагружение определяется как $S_e = \log b/m = 168 \text{ Н/мм}^2$.

5. В соответствии с (4.5.7) можно найти, используя (4.1.5), среднее значение долговечностей $EN_e = 8,9 \cdot 10^4$, которое получается весьма близким к значению $9 \cdot 10^4$ циклов нагружения, найденных в работе «Надежность металлургического оборудования...» [21].

4.5.4. Соответствие моделей экспериментальным расчетам

Рассмотренные примеры оценки долговечности дают представление о том, как следует проводить расчеты параметров распределений долговечности при использовании стохастических моделей, рассмотренных в этой главе. Показано вполне приемлемое соответствие с расчетами, проведенными по известным методикам. Изучавшаяся стохастическая надстройка задачи прогнозирования ресурса над детерминированным правилом Пальмгрена – Майнера обладает основной положительной чертой: модель накопления повреждений, исходные данные по усталости и способ прогнозирования ресурса являются взаимосвязанными элементами замкнутой модели определения надежности элемента по критерию усталостной долговечности. Простота стохастических конструкций моделей и невысокая требовательность к исходным данным также являются весьма привлекательными, что дает возможность использовать их в большинстве ситуаций прогнозирования ресурса компонентов. Естественная взаимосвязь задач прогнозирования ресурса и остаточного ресурса легко прослеживается и не требует дополнительных усилий по обнаружению со стороны исследователей.

Некоторое несоответствие с экспериментальными данными по статистическим критериям объясняется рядом причин:

1. Нельзя считать процесс накопления полностью детерминированным и объяснять рассеяние долговечности лишь разбросом врожденных свойств образцов.

2. Использовалось малое количество экспериментальных данных.

3. Исходные распределения долговечности, использованные для описания разброса экспериментальных данных, нельзя считать вполне логнормальными. Просто это является естественным допущением как у автора, так и у большинства других исследователей, использующих его при описании рассеяния долговечностей. Как правило, при проверке по статистическим критериям такого рода выборки на принадлежность к тому или иному типу распределений не получается вполне утвердительных результатов.

Несмотря на высказанные замечания, наблюдается подтверждение наличия индивидуальных усталостных свойств образцов, которое было продемонстрировано на рис. 4.4.4. Вместе с тем, можно надеяться, что при отсутствии простых и одновременно качественных стохастических моделей накопления повреждений этот подход может быть доведен до приемлемого инженерного уровня. Сравнение расчетов долговечности элементов конкретных конструкций подъемно-транспортных машин по предлагаемым моделям с расчетами по известным методикам также показало приемлемое соответствие.

Глава 5. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ УСТАЛОСТИ: ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Как и в предыдущей главе рассматриваются индивидуальные кривые усталости, предопределяющие усталостное поведение образцов, когда каждая выборочная ИКУ соответствует врожденным усталостным свойствам некоторого неизвестного нам образца. Приводится доказательство существования ИКУ на основе теоремы Колмогорова. Доказательство этого и других утверждений проводится на основе логнормальных распределений ресурса, получаемых при нагружениях с постоянной амплитудой. Рассматриваются также задачи прогнозирования ресурса при нерегулярном нагружении на основе линейной модели накопления повреждений.

5.1. Исходные предпосылки

Как уже отмечалось ранее, модели деградации должны быть достаточно «богатыми» в вероятностном смысле, чтобы была возможность подстановки их в развитые системы управления процессами деградации. Однако, приглядевшись внимательнее к существующим моделям усталостного накопления повреждений, можно заметить, что они не обладают необходимыми качествами (некоторое исключение составляют модели, рассмотренные в предыдущей главе, хотя и они не представляются совершенством). Прежде всего, должно быть указано то вероятностное пространство, на котором развиваются все случайные события. Также должно быть указано, какие физические или мысленные эксперименты лежат в основе построения вероятностного пространства и как события, наблюдаемые в результате проведения экспериментов, соотносятся с элементами этого пространства. Далее, если указано вероятностное пространство, то все случайные величины, появляющиеся по нашему желанию для удобства или необходимости описания усталостных свойств, должны находиться в функциональной или стохастической зависимости, и т. д.

Один из наиболее развитых и в определенной степени аналогичный предлагаемой здесь идее подходов рассматривается в работе В. Авакова [96]. Он вводит функции усталостной надежности, объединяющие усталостные свойства образцов с методами оценки надежности; хотя в целом данный подход нацелен на проблемы проектирования, где используются мно-

гомерные функции распределения усталостной прочности и долговечности для объединения соответствующей информации о материале. Для оценки остаточного ресурса функции усталостной надежности имеют меньшее применение, поскольку необходимо знание распределений накопленного повреждения и остаточного ресурса в некоторый момент эксплуатации, а не только до ее начала. При другом подходе рассматриваются кривые надежности (функции надежности отношения ресурса к его среднему) и квантильные кривые усталости [25, 67, 68, 135, 136]. Этот метод моделирования поведения элементов МС можно считать более подходящим для применения в задачах мониторинга усталостного повреждения. Однако, данные подходы нельзя назвать в достаточной степени проработанными для использования в задачах оптимальной остановки элементов МС либо других задачах оптимального управления. Поэтому необходимо создать настоящий метод построения вероятностной структуры усталостного феномена, который учитывал бы одновременно усталостные свойства образцов и динамику накопления повреждений.

В предыдущей главе рассматривалось достаточно простое построение ИКУ на основе рандомизации предела выносливости. Эта модель оказалась весьма эффективной для решения задач прогнозирования остаточного ресурса, но остались некоторые невыясненные обстоятельства. Сформулируем еще раз сущность ИКУ. При оценке любых усталостных параметров используются случайные объекты – индивидуальные кривые усталости, а их выборочные кривые являются описанием усталостных свойств образцов. Вместе с тем, с какой именно выборочной кривой мы имеем дело непосредственно в процессе испытаний или эксплуатации нам неизвестно. Сами же ИКУ являются носителем случайной генеральной совокупности рассматриваемых образцов, даже если это единственная конструкция в своем роде. Для использования ИКУ в расчетах данное обстоятельство не является препятствием. Естественно, были достаточно успешные попытки использования концепции ИКУ в расчетах на основе квантильных кривых усталости и их аналогов [63, 67, 68]. В то же время можно утверждать, что пока не существует четко разработанной теории ИКУ.

В предыдущей главе рассматривался прямой подход к построению ИКУ: зная вид ИКУ и задавая распределения ее параметров, необходимо найти распределения ресурса и определить действительное поведение образцов на основе этих распределений. Как и в общей механике, существует

другой, обратный, подход к моделированию усталостного феномена. Если даны распределения ресурса, полученные на основе испытаний, необходимо найти случайные объекты, ответственные за усталостное поведение образцов. Именно данная и сопутствующие ей задачи изучаются ниже.

Обращаясь снова к аналогии из механики, можно предложить две категории моделей: статическую и динамическую. Если статистические свойства образцов зафиксированы, процесс накопления повреждений развивается на их основе и оценивается посредством этих свойств, то такая задача усталости называется статической. Если во главу угла ставится стохастический процесс накопления повреждений и усталостные свойства интерпретируются посредством этого процесса, то такая задача называется динамической. Разница между данными задачами, вообще говоря, является следствием разницы между двумя направлениями исследований: проектированием и мониторингом. Наше исследование можно классифицировать как статическое, поскольку проектирование используется здесь для решения динамических задач. Однако не следует сразу отвергать подобные методы, поскольку они продвигают нас к пониманию усталости и могут с успехом использоваться не только в задачах проектирования, но и в задачах мониторинга усталостного повреждения и прогнозирования остаточного ресурса.

Приведем основные статистические результаты, наиболее часто используемые исследователями, в качестве предположений, выделим вероятностное пространство и проинтерпретируем соответствующие усталостные события.

5.2. Основные предположения и существование индивидуальных кривых усталости

Как и прежде, примем, что функции распределения ресурса являются логнормальными. Это означает, что на заданном интервале S амплитуд нагружения s , $s \in [s_l, s'']$, где s_l и s'' – нижняя и верхняя границы интервала S , распределения логарифма числа циклов до отказа являются нормальными $N(m_s, \sigma_s)$ для каждого возможного значения s из заданного интервала, как это изображено на рис. 5.2.1, *a*, где прямая линия представляет собой среднюю кривую усталости. Параметры распределения $N(m_s, \sigma_s)$: среднее m_s и стандартное отклонение σ_s считаются непрерывными и монотонными функциями на S .

Известно, что единственным наблюдаемым событием при усталостных испытаниях является отказ образцов после циклирования с некоторой историей нагружения на некотором цикле N . Будем считать, что образцы

принадлежат одной генеральной совокупности. Разумно предположить, что для этой совокупности и данных условий нагружения существует общее вероятностное пространство, позволяющее трактовать единым образом результаты испытаний. К сожалению, каждый образец может быть использован лишь однажды. Тем не менее, поставим следующий вопрос: что произойдет, если этот образец может быть восстановлен и помещен снова на испытания с этой же либо другой амплитудой нагружения? Если бы этот мысленный эксперимент мог быть произведен в действительности, то следовало бы рассчитывать на некоторую статистическую регулярность результатов испытаний, поскольку сами образцы (их совокупность) должны генерировать некоторое вероятностное пространство своих усталостных свойств. В частности, можно, наверное, рассчитывать, что логарифм ресурса образцов будет распределен по нормальному закону как для испытанных, так и для интерполированных амплитуд. Более того, эти случайные величины, контролируемые семейством нормальных распределений $\{N(m_s, \sigma_s)\}$, должны быть каким-то образом взаимосвязаны.

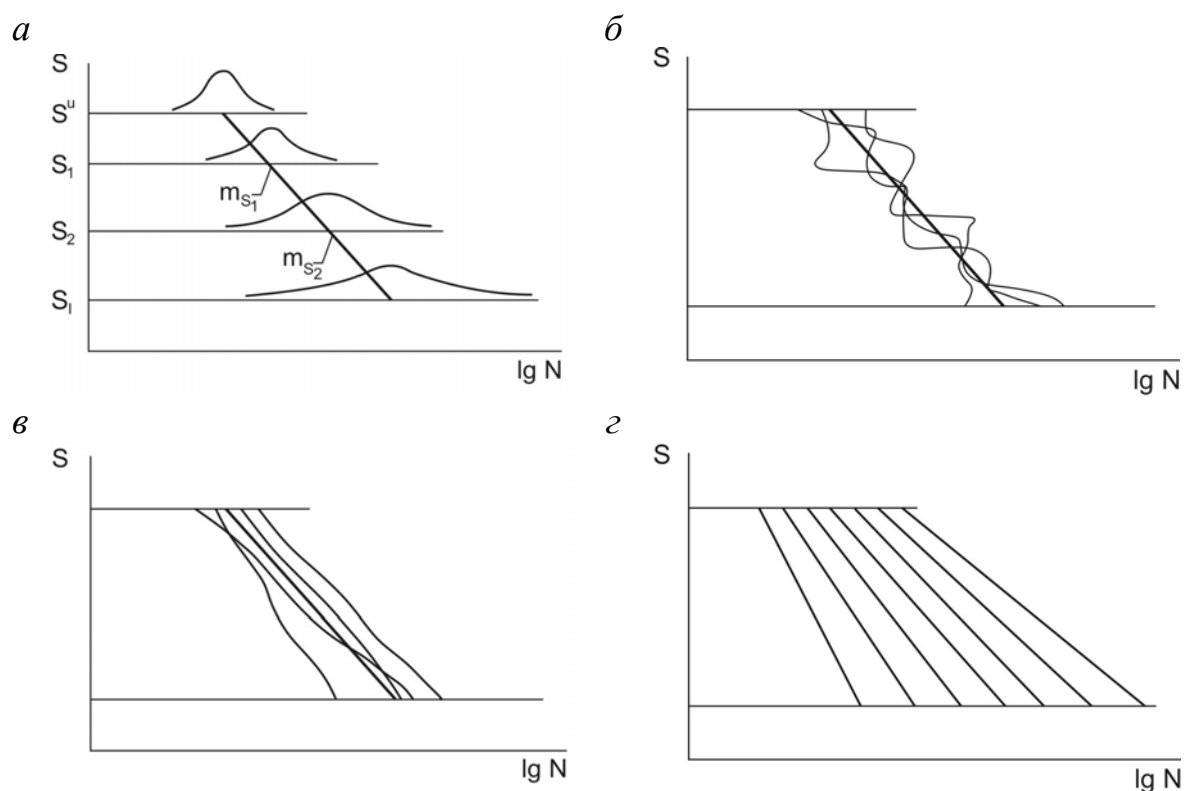


Рис. 5.2.1. Интерпретация данных усталостных испытаний при постоянной амплитуде:

а – плотности нормального распределения; *б* – выборочные ИКУ как реализации гауссовской функции; *в* – сглаженные выборочные ИКУ; *г* – линейные выборочные ИКУ

Предположим теперь, что для любого набора $s_1, \dots, s_n \in S$, $s_1 < s_2 < \dots < s_n$, существует многомерное нормальное распределение $F_{s_1, \dots, s_n}(x_1, \dots, x_n)$. Это предположение не противоречит большинству результатов усталостных испытаний, поскольку маргинальные распределения для любых s_i , $i = 1, \dots, n$, являются также очевидно нормальными, что и наблюдается в экспериментах. Так что это предположение можно принять за базовое для дальнейших рассуждений и попытаться найти соотношения, ответственные за усталостное поведение образцов.

С учетом теоремы Колмогорова (см. п. 5.6) о существовании случайной функции, можно утверждать, что существуют такое вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ и случайная функция $Z = (N_s^l(\omega))_{s \in S}$, определенная на этом пространстве, что вероятностная мера P определяется уравнением (5.6.2). Это уравнение означает, что следующая функция является искомой в соответствии с координатным методом построения случайных процессов:

$$N_s^l(\omega) = \omega_s. \quad (5.2.1)$$

Верхний индекс (l) означает, что ресурс на интервале S наносится на логнормальную шкалу чисел. Для некоторого фиксированного $\omega \in \Omega$ функция $N_s^l(\omega) = \omega_s$ называется выборочной функцией (траекторией) случайной функции Z на S . С другой стороны, если зафиксирован аргумент s , $N_s^l(\omega)$ есть случайная величина с нормальным распределением. Таким образом, для каждого образца из генеральной совокупности при нагружении с постоянной амплитудой существует выборочная функция $N_s^l(\omega)$, определяющая его усталостное поведение. Неприятность состоит в том, что мы не знаем, какая из $N_s^l(\omega)$ описывает поведение данного образца. Но это не является непреодолимым препятствием, как будет показано ниже.

Назовем случайную функцию $Z = (N_s^l(\omega))_{s \in S}$, определенную таким образом на пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, индивидуальной кривой усталости, а выборочную $N_s^l(\omega)$ для некоторого $\omega \in \Omega$ – выборочной ИКУ. Последнее означает, что на сгенерированном вероятностном пространстве траектории (выборочные ИКУ) становятся точками $\omega \in \Omega$.

Конструирование случайной функции посредством теоремы Колмогорова приводит к слишком большому множеству выборочных функций, что подтверждают следующие иллюстрации:

а) если взять обычную детерминированную кривую усталости в качестве математического ожидания случайной функции Z $m(s) = EN_s^l$ и любую

неотрицательную действительную функцию $C(s, t)$, $s, t \in S$, тогда, согласно теореме 5.6.2, существует гауссовская функция, которая соответствует введенному набору функций распределений $F_{s_1, \dots, s_n}(x_1, \dots, x_n)$; возможные выборочные функции показаны на рис. 5.2.1, б. Посмотрев на этот рисунок, можно сказать, что данные кривые вряд ли имеют какое-то отношение к усталости, поскольку ожидалось более регулярные кривые. Поэтому следует принять более жесткие ограничения на возможные функции ковариации $C(s, t)$;

б) пусть выборочные кривые представлены на рис. 5.2.1, в. Здесь они больше похожи на квантильные кривые усталости, с которыми обычно приходится иметь дело. Сравнивая, однако, две кривые, можно заметить, что если каждая из них соответствует некоторому образцу, то один образец имеет больший ресурс при нагружении с амплитудой s_1 , чем другой. В свою очередь, при нагружении с другой амплитудой s_1 второй образец имеет больший ресурс, чем первый. Вообще говоря, данная ситуация кажется не слишком экзотической, поскольку мы все-таки не знаем, как образцы реагируют на циклическое нагружение. Поэтому моделирование поведения образцов с помощью подобных кривых не отвергается сразу, а лишь откладывается.

5.3. Форма индивидуальных кривых усталости

В этом параграфе делается попытка ответить на вопрос о том, какая форма ИКУ может быть принята, чтобы удовлетворять предыдущим рассуждениям и быть достаточно простой для расчетов усталостной долговечности. По-видимому, следует ввести дополнительные ограничения, а именно, предположить, что корреляционная функция тождественно равна постоянной величине. Что происходит с ИКУ – суть последующего изложения. Забегая вперед, можно сказать, что будет получена, как и ожидалось, линейная форма ИКУ.

5.3.1. Общая форма индивидуальных кривых усталости

Предположим, что корреляционная функция $r(s, t)$ тождественно равна единице для построенной выше гауссовской случайной функции Z . Если это действительно так, то тогда, используя теорему 5.6.3, для любых

$s_1, s_2 \in S$, можно найти такие действительные числа $a(s_1, s_2)$ и $b(s_1, s_2)$, что $N_{s_2}^l = a(s_1, s_2)N_{s_1}^l + b(s_1, s_2)$ и, следовательно, справедливо равенство

$$N_s^l = a_s N_0^l + b_s, \quad (5.3.1)$$

где a_s, b_s – некоторые действительные функции на S ;

N_0^l – нормальная случайная величина, определяющая разброс усталостных свойств; например, она может быть интерпретирована как ресурс для некоторой амплитуды нагружения $s = s_0$.

Подобные результаты могут быть получены, если предположить существование детерминированной функции для ИКУ: $N_s^l = \varphi(N_0^l)$, а распределения ресурса для любого s есть распределения одного типа. Следовательно, по теореме 5.6.4 эта функция необходимо линейная и также может быть представлена в виде (5.3.1). Следует отметить, что выборочные ИКУ, определяемые этим уравнением, не обязательно линейные функции на логнормальной бумаге, как это может показаться на первый взгляд. Например, выборочные кривые, определяемые уравнением $N_s^l = e^{-s} N_0^l$, не линейны, и в то же время эти ИКУ вполне подходят под наши рассуждения. Следовательно, необходимо задать правило формирования ИКУ в явном виде, не прибегая к методу исключений.

По теореме 5.6.3 уравнение (5.3.1) принимает вид:

а) если использовать характеристическую нормальную величину N_0^l :

$$N_s^l = \frac{\sigma_s}{\sigma_0} N_0^l + \left(m_s - \frac{\sigma_s}{\sigma_0} m_0 \right); \quad (5.3.2)$$

б) если использовать стандартную нормальную величину ξ :

$$N_s = \sigma_s \xi + m_s. \quad (5.3.3)$$

Иерархию распределений в уравнениях (5.3.2) и (5.3.3) можно проиллюстрировать следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccccccc} \xi \in N(0,1) & \leftrightarrow & N_0^l \in N(m_0, \sigma_0) & \leftrightarrow & N_s^l \in N(m_s, \sigma_s) & & \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ & & N_0 \in N(m_0, \sigma_0) & \leftrightarrow & N_s^l \in LN(m_s^l, \sigma_s^l) & & \end{array} \quad (5.3.4)$$

Диаграмма (5.3.4) означает, что уравнение (5.3.3) может быть записано, если известно среднее и стандартное отклонение, как

$$\log N_s = \sigma_s \xi + m_s, \quad (5.3.5)$$

где ресурс N_s задается на линейной шкале и имеет логнормальное распределение $N_s \in LN(m_s, \sigma_s)$.

5.3.2. Преемственность моделей

Прежде чем двинуться вперед, полезно оглянуться назад – на модели, изучавшиеся в предыдущей главе, и установить преемственность тех и этих моделей. Ранее предполагалось, что стандартное отклонение для любых амплитуд нагружения s является константой: $\sigma_s = \sigma$, а функция среднего m_s линейна на двойной логарифмической шкале:

$$\frac{m_s - m_0}{m_R - \log s} = m, \quad (5.3.6)$$

где m_R, m_0 – координаты некоторой точки на вероятностной бумаге.

Уравнение (5.3.6) обычно называется кривой усталости, где m – угол наклона кривой. В этом случае (5.3.2) преобразуется в

$$\log N_s = \log N_0 + m_s - m_0. \quad (5.3.7)$$

Пусть S_R – логнормальная величина с параметрами m_R и σ_R , т. е. $S_R \in LN(m_R, \sigma_R)$. Пусть N_0 соотносится с S_R как

$$\log N_0 = m \log S_R + \log \overline{N}_0 - m m_R, \quad (5.3.8)$$

где $\log \overline{N}_0 = m_0$, т. е. эта константа равна среднему случайной величины $\log N_0$.

Подставляя уравнение (5.3.6) в (5.3.8), получим следующее уравнение:

$$\log N_s = \log \overline{N}_0 + m(\log S_R - \log s). \quad (5.3.9)$$

Последнее эквивалентно описанию ИКУ из предыдущей главы, где рандомизировался предел выносливости, а случайная величина S_R имела как раз этот смысл. Для функций распределения может быть построена следующая диаграмма:

$$S_R \in LN(m_R, \sigma_R) \leftrightarrow N_0 \in LN(m_0, \sigma_0) \leftrightarrow N_s \in LN(m_s, \sigma_s). \quad (5.3.10)$$

5.3.3. Линейная индивидуальная кривая усталости

В предыдущем параграфе стандартное отклонение для любого s принималось как константа. Именно поэтому выборочные кривые имели вид параллельных линий (см. гл. 4). Сейчас будут приведены линейные формы ИКУ, когда среднее m_s и стандартное отклонение σ_s числа циклов до отказа есть линейные функции от s . На двойной логарифмической шкале они могут быть представлены в виде

$$m_s = m_0 + m(m_R - \log s), \quad \sigma_s = \sigma_0 + v(m_R - \log s),$$

и, следовательно, ИКУ принимают линейную форму

$$\log N_s = [\sigma_0 + v(m_R - \log s)]\xi + [\log \overline{N}_0 + m(m_R - \log s)].$$

Если используется полулогарифмическая шкала, то ИКУ записываются как

$$\log N_s = [\sigma_0 + v(m_R - s)]\xi + [\log \overline{N}_0 + m(m_R - s)]. \quad (5.3.11)$$

Выборочные кривые, соответствующие уравнению (5.3.11), показаны расходящимся пучком на рис. 5.2.1, z .

Иллюстративный пример. Проиллюстрируем процесс формирования ИКУ на реальных экспериментальных данных. В предыдущей главе рассматривалось использование линейных выборочных ИКУ для моделирования усталостных свойств образцов из стали и алюминиевого сплава. Поэтому будет полезно, во-первых, попытаться рассмотреть нелинейный случай, а во-вторых, случаи с неметаллическими материалами. Исследователями была рассмотрена серия усталостных испытаний на изгиб восьмислойных образцов с хлопковыми прослойками, имеющих отверстия [135]. Для описания разброса значений ресурса при испытаниях с постоянными амплитудами нагружения использовалось логнормальное распределение. Также были построены квантильные кривые усталости с точкой перегиба в точке 10^6 циклов, т. е. просто прямых линий для описания долговечности оказалось недостаточно. Воспользуемся уравнением (5.3.5) для создания нелинейных выборочных ИКУ по приведенным данным. Чтобы решить данную задачу, необходимо найти две функции m_s и σ_s по экспериментальным данным при условии, что

распределения ресурса определены как логнормальные. Аппроксимируя выборочные параметры логнормальных распределений [135] степенными функциями, получим следующую форму ИКУ:

$$\log N_s = 18595,5s^{-2,02}\xi + 2509,62s^{-1,064}.$$

Ее выборочные кривые показаны на рис. 5.3.1 для значений переменной x : $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Из этого рисунка видно, что выборочные функции не только нелинейны, но и имеют видимое расхождение при уменьшении амплитуды нагружения.

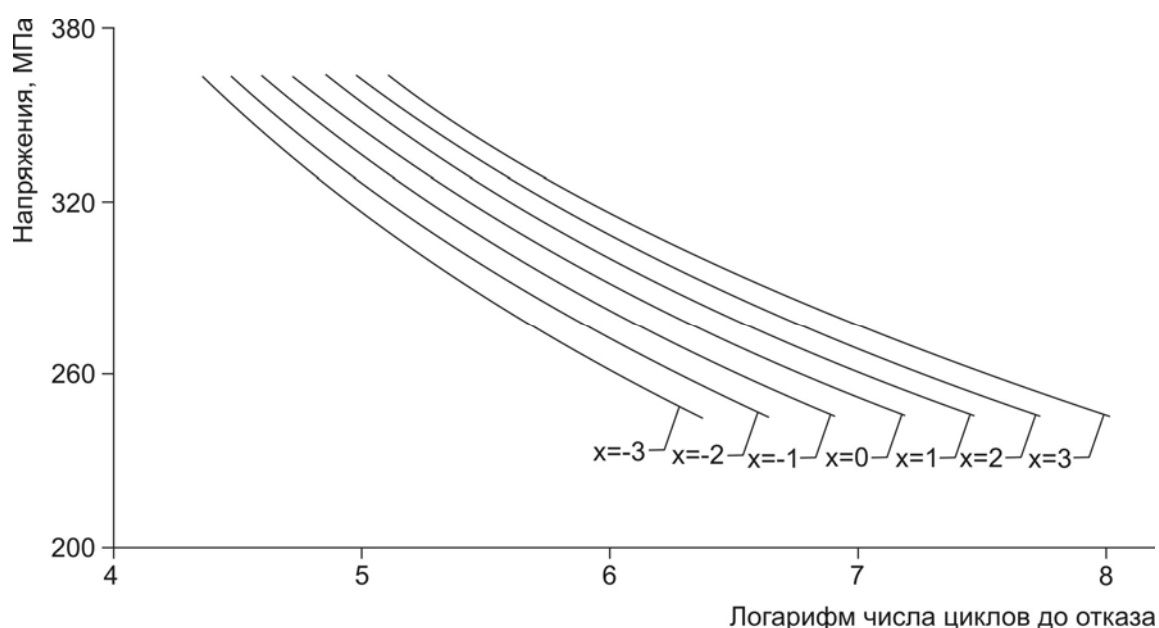


Рис. 5.3.1. Выборочные ИКУ, построенные по данным Т. Шимокава, С. Танака [135]

5.4. Соотношение между индивидуальными и квантильными кривыми усталости

Вглядевшись более внимательно в приведенные выше уравнения ИКУ, можно заметить их схожесть с квантильными кривыми усталости. Сходство действительно есть, поскольку, если применить «квантильное» определение непосредственно к уравнению ИКУ, то квантильные кривые получаются сразу. Но верно ли обратное? Пусть заданы квантильные кривые усталости, т. е. кто-то произвел испытания, нанес результаты на логарифмическую бумагу, получил некоторые математические соотношения, используя квантили стандартной нормальной величины. Тогда возможно найти

генерирующий их объект – индивидуальную кривую усталости, по следующему уравнению:

$$(\log N_s)_p = \sigma_s z_p + m_s, \quad (5.4.1)$$

где индекс p у переменной показывает, что это квантиль порядка p , а z_p – квантиль стандартной нормальной величины. В качестве крайних значений обычно используются 1 и 99 %-е квантили. Если уравнение (5.4.1) и квантильные кривые были построены корректно и все формальности выполнены, то можно расширить интервал значений p до $(0,1)$, а возможные значения z_p до $(-\infty, +\infty)$. Поскольку z_p является непрерывной функцией, для которой существует нормальная функция распределения $F(z)$, то по теореме 5.6.6 существует такая случайная величина ξ , что $P\{\xi < z_p\} = F(z_p) = p$. Так как $z_p \in (-\infty, +\infty)$, то эта переменная может быть заменена просто на z и справедливо равенство $P\{\xi < z\} = F(z)$. Благодаря взаимнооднозначному соответствию, устанавливаемому уравнением (5.4.1), те же самые аргументы могут быть приняты для квантилей $(\log N_s)_p$. Это означает, что может быть построен случайный объект $\log N_s = \sigma_s \xi + m_s$, соответствующий своим квантильным аналогам. В принятых здесь терминах он называется ИКУ.

Мы постараемся показать, как построить модель ИКУ по чьим-либо экспериментальным данным, если они приведены в квантильной форме. В уравнении, подобном (5.4.1), необходимо просто заменить квантили на стандартную нормальную переменную. Чтобы проиллюстрировать последнее утверждение, рассмотрим следующий пример.

Иллюстративный пример. В гл. 7 будут обсуждаться результаты экспериментов с конвейерными лентами и будут построены квантильные кривые усталости в виде уравнения (7.3.8). Это уравнение преобразуется для ИКУ к виду

$$\log N_\gamma = (0,19 - 1,03\gamma)\xi + (6,37 - 11,39\gamma), \quad (5.4.2)$$

где γ – угол сдвига, измеряемый в радианах.

Выборочные кривые показаны на рис. 5.4.1 для тех же значений x , что и в примере в п. 5.3.

Может показаться, что, в принципе, нет необходимости введения ИКУ вместо квантильных кривых усталости, поскольку уравнения схожи, кривые на рисунках подобны и т. д. Однако это не так, поскольку данные

объекты абсолютно различны по своей природе. Если первый – это случайный объект, то вторые – набор детерминированных кривых. Следовательно, когда используется ИКУ, весь спектр возможностей теории вероятностей предоставляется к услугам исследователя при решении задач проектирования, мониторинга и технического обслуживания. Предыдущее изучение показало существование ИКУ и их возможные формы. К счастью для нас, они оказались подобны квантильным кривым усталости, и на практике не требуются какие-либо дополнительные усилия для задания ИКУ, если известны квантильные кривые усталости.

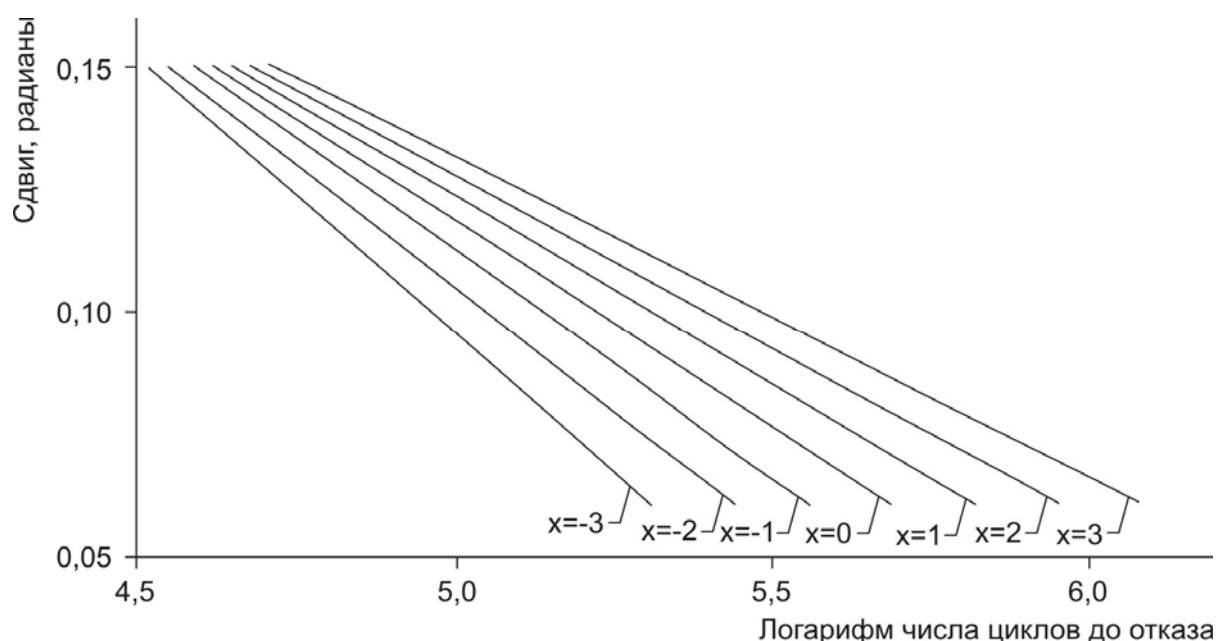


Рис. 5.4.1. Выборочные ИКУ, построенные по данным, рассмотренным в гл. 7

5.5. Прогнозирование ресурса

Продemonстрируем использование ИКУ на задачах прогнозирования ресурса и нахождения функций распределения ресурса образцов при нерегулярном нагружении. Ранее мы говорили о проблеме конструирования ИКУ, когда нагрузка имела постоянную амплитуду нагружения за время одного эксперимента. Поэтому необходимо найти метод вычисления функций распределения ресурса при нерегулярном нагружении. Воспользуемся снова линейным правилом накопления повреждений, формулы и постулаты которого приведены в гл. 1.

5.5.1. Линейное накопление повреждений при двухуровневом нагружении

Рассмотрим случай, когда история нагружения состоит из циклов, имеющих не одну и ту же амплитуду нагружения. Чтобы прояснить концепции прогнозирования ресурса, изучим пока двухуровневое нагружение образцов. Образец нагружается сначала в течение n_1 циклов при амплитуде s_1 , а затем доводится при амплитуде s_2 до отказа за N_{res} циклов. Линейное правило накопления повреждений дает

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{N_{res}}{N_2} = 1, \quad (5.5.1)$$

где $N_1 = N_{s_1}(\xi(\omega))$, $N_2 = N_{s_2}(\xi(\omega))$.

Остаточный ресурс N_{res} вычисляется как

$$N_{res} = N_2 \left(1 - \frac{n_1}{N_1} \right). \quad (5.5.2)$$

Уравнения (5.5.1–5.5.2) не отличаются по виду от своих детерминированных предшественников, однако в них подставляются уже случайные величины. Таким образом, внешняя форма уравнений осталась, но при этом поменялось их содержание.

В соответствии с данными, представленными в предыдущих параграфах, уравнения (5.5.1–5.5.2) включают в себя случайные величины N_1 и N_2 , зависящие от одной и той же ω , т. е. они являются взаимозависимыми. Последнее означает, что в правиле накопления повреждений должна использоваться одна и та же выборочная ИКУ $N_s(\omega)$. В силу сделанных предположений известно, что некоторая выборочная ИКУ предопределяет поведение образца при регулярном нагружении. Если принять, что линейное правило, задаваемое уравнением (5.5.1), с большим количеством амплитуд нагружения, чем две, выполняется, то одна и та же выборочная ИКУ определяет также поведение образца при нерегулярном нагружении. Таким образом, предполагается, что повреждение накапливается по одной выборочной ИКУ как для многоуровневого, так и для случайного нагружения. Это дает нам возможность воспользоваться вероятностными правилами, полученными ранее, для оценки просто ресурса и остаточного ресур-

са в том числе. Для того чтобы исключить вырожденный случай, потребуем также, чтобы уравнение (5.5.1) выполнялось с вероятностью единица в момент отказа, т. е.

$$P\left\{\omega: \sum_i \frac{n_i}{N_i} \neq 1\right\} = 0.$$

5.5.2. Функция распределения остаточного ресурса

Сначала попытаемся найти распределение остаточного ресурса образца при двухуровневом нагружении.

Пусть образец прециклируется при амплитуде s_1 в течение заданного количества циклов n_1 . Будем считать, что за это время образец не потерпел отказа (если отказал, то остаточный ресурс равен нулю). После этого образец нагружается до отказа при амплитуде s_2 . Требуется найти распределение случайной величины – остаточного ресурса N_{res} , определяемой уравнением (5.5.2). Распределение N_{res} определяется посредством условных вероятностей:

$$P\{N_{res} < y\} = P\{N_{res} < y / N_1 > n_1\} = \frac{P\{n_1 < N_{res} < y\}}{P\{N_1 > n_1\}}. \quad (5.5.3)$$

Если уравнение (5.5.1) справедливо, то выполняется следующее равенство:

$$P\{N_1 > n_1\} = P\{\xi > x^*\}, \text{ где } x^* = (\log n_1 - m_1)/\sigma_1. \quad (5.5.4)$$

Чтобы найти вероятность, определяемую уравнением (5.5.3), следует более пристально изучить величину N_{res} . Ясно, что по определению (5.5.2) $N_{res} > 0$. Кроме того, она может быть представлена с помощью ξ как

$$P\{N_{res} < y\} = P\left\{10^{m_2 + s_2 \xi} \left(1 - \frac{n_1}{10^{m_1 + s_1 \xi}}\right) < y\right\}. \quad (5.5.5)$$

Глядя на уравнение (5.5.3), можно предположить, что существует такое число $n(x^*)$, что $P\{N_{res} > n(x^*) \geq 1\} = 1$. Подобная ситуация вполне допустима, поскольку множество $\{\omega: \xi(\omega) > x^*\}$ выделяет из пространства Ω такую область, в которой соответствующие выборочные ИКУ не были реализованы, значит, первый цикл нагружения при амплитуде s_2 не может

вызвать отказа. Однако это предположение неверно, и надо показать, что множество $\{\omega : \xi(\omega) > x_*\}$ просто эквивалентно множеству $\{\omega : N_{res}(\omega) > 0\}$:

$$P\{\omega : \xi(\omega) > x_*\} = P\{\omega : N_{res}(\omega) > 0\}. \quad (5.5.6)$$

Чтобы доказать последнее утверждение, рассмотрим более тщательно функцию

$$\varphi(x) = 10^{m_2 + s_2 x} \left(1 - \frac{n_1}{10^{m_1 + s_1 x}} \right). \quad (5.5.7)$$

Можно утверждать, что эта функция непрерывна и монотонно возрастает на множестве $A_{x_*} = [x_*, \infty)$. Непрерывность функции следует из того, что это комбинация алгебраических сумм и произведений непрерывных показательных функций на A_{x_*} . Рассмотрим далее два числа $x_1 < x_2$; $x_1, x_2 \in A_{x_*}$, а также соответствующие значения функции (5.5.7). Тогда выполняется неравенство

$$10^{m_2 + s_2 x_1} \left(1 - \frac{n_1}{10^{m_1 + s_1 x_1}} \right) < 10^{m_2 + s_2 x_2} \left(1 - \frac{n_1}{10^{m_1 + s_1 x_2}} \right).$$

Последнее следует из того, что отношение «<» выполняется как для первого множителя, так и для второго, поскольку это показательные функции, для которых данное свойство очевидно.

И, наконец,

$$\lim_{x \rightarrow x_*} \varphi(x) = \varphi(x_*) \quad (5.5.8)$$

вследствие непрерывности и монотонности этой функции на A_{x_*} . Равенство (5.5.8) подтверждает справедливость уравнения (5.5.6), поскольку $\varphi(x_*) = 0$. Вместе с тем, граничную точку x_* следует удалить из рассмотрения, так как N_{res} должна быть больше нуля, поскольку до n_1 включительно отказа не происходило.

Заметим, что вероятность в числителе уравнения (5.5.3) может быть представлена с помощью функции (5.5.7) как

$$P\{N_{res} < y\} = \frac{P\{x_* < \xi < \varphi^{-1}(y)\}}{P\{\xi > x_*\}}, y > 0. \quad (5.5.9)$$

Вероятность в знаменателе уравнения (5.5.9) делает остаточный ресурс собственной случайной величиной, что удобно для последующих с ней операций.

С другой стороны, уравнение (5.5.9) неудобно для применения из-за нелинейного характера функции (5.5.7), поскольку потребуется вычислительная процедура. Однако, если воспользоваться статистическим методом линеаризации, уравнение (5.5.9) станет гораздо проще. Используем разложение в ряд Тейлора и оставим только первый член разложения функции: $10^x = 1 + x \ln 10$. Функция (5.5.9) становится равной

$$\varphi(x) \approx ax + b, \quad (5.5.10)$$

где

$$\begin{aligned} a &= [10^{m_2} \sigma_2 - n_1 10^{m_2 - m_1} (\sigma_2 - \sigma_1)] \ln 10 \\ b &= 10^{m_2} - n_1 10^{m_2 - m_1} \end{aligned}$$

Это разложение возможно лишь в том случае, если стандартные отклонения достаточно малы, что часто встречается для логарифмов ресурса при усталостных испытаниях. Потребуем также, чтобы значения параметра x были малы. Это вполне легитимно, потому что обычно нас интересуют значения лишь в следующей области $\xi : P\{-3 < \xi < 3\} = 0,997$.

Следовательно, уравнение (5.5.9) приобретает вид

$$P\{N_{res} < y\} = \frac{P\{x_* < \xi < (y - b)/a\}}{P\{\xi > x_*\}}, y > 0. \quad (5.5.11)$$

Таким образом, благодаря наличию уравнений (5.5.9) и (5.5.11) распределение остаточного ресурса вычисляется посредством стандартного нормального распределения.

Прежде чем привести иллюстративный пример, заметим, что распределения остаточного ресурса при более сложных видах нагружения могут быть определены подобным же образом.

Иллюстративный пример. Существование ИКУ для различных материалов было установлено посредством статистических методов в предыдущей главе. Поскольку ИКУ являются ненаблюдаемыми объектами, чтобы показать их существование, требуется сравнение распределений остаточного ресурса, определенных уравнениями (5.5.8) и (5.5.10), с эмпирическими. Смещение плотностей распределений и эмпирических гисто-

грамм (см. рис. 4.4.4) доказывает наличие врожденных усталостных свойств, которые возможно промоделировать с помощью ИКУ в том случае, если принято линейное правило накопления повреждений. Изучим теперь еще один яркий пример для двухуровневого нагружения, когда экспериментальные данные показывают явно нелинейный характер поведения кривых усталости в детерминированном случае. Причиной рассмотрения этих данных является желание расширения предсказательных возможностей метода ИКУ по линейному правилу статистическими методами. Разумно ожидать, что разброс значений ресурса может быть покрыт распределением вероятности с достаточной степенью точности.

Продолжим рассмотрение примера из п. 5.4. В гл. 7 описываются результаты эксперимента двухуровневого нагружения образцов из резиноканевых конвейерных лент. Данные образцы нагружались сдвиговыми деформациями на одной амплитуде в течение $n_1 = 2 \cdot 10^4$ циклов, а затем на другой амплитуде доводились до отказа – расслоения ленты. Амплитуды циклов нагружения и соответствующие значения средних и стандартных отклонений логарифмов ресурса приведены в таблице.

Оценка параметров логнормального распределения для двух значений амплитуд сдвиговых деформаций (п. 7.3)

Номер п/п	Значения параметров		
	γ	m	σ
1	0,154	4,62	0,015
2	0,107	5,152	0,072

Так, например, при действии детерминированного линейного правила накопления повреждений при смене амплитуды накопленное повреждение составляет $\frac{n_1}{N_1} = 0,53$.

Воспользуемся уравнением (5.5.9) для нахождения распределения остаточного ресурса. Нормирующая вероятность определяется как $P\{\xi > -23\}$, и поскольку ξ есть стандартная нормальная величина, эта вероятность может быть принята за единицу. Так что можно не обращать внимание на знаменатель уравнения (5.5.9). Полезно, однако, напомнить, что при детерминированном подходе величина накопленного повреждения – 0,53 – не кажется такой уж маленькой. Рекомендуется не обращать в дальнейшем внимание

на накопленное за период прециклирования повреждение. Следующий шаг – нахождение числителя (5.5.9). Используя численную процедуру, поскольку найти в явном виде обратную функцию $\varphi^{-1}(y)$ не удастся, найдем эту функцию. На рис. 5.5.1, а $\varphi^{-1}(y)$ нанесена сплошной кривой на интервале $[-3, 3]$. Ее линеаризованный вариант изображен на этом же рисунке пунктирной линией. Плотности распределений для основного и линеаризованного вариантов, определяемые уравнениями (5.5.7) и (5.5.10), приведены на рис. 5.5.1, б. Пунктирная кривая изображает плотность нормального распределения на логарифмической шкале для линеаризованного варианта. Из этого рисунка видно, что линеаризованный вариант кажется вполне допустимым, и более того – появляется возможность продолжения работы с привычным для нас логнормальным распределением.

В данном тесте было разрушено шесть образцов на двухуровневое нагружение, ресурс которых представлен квадратиками на рис. 5.5.1, б по оси x . Прокомментируем их расположение. Оказалось, что модель мало чувствительна к достаточно большому значению повреждения, определяемого по детерминированному линейному правилу накопления повреждений. Кроме того, видно, что модель едва ли подходит для описания данных эксперимента, что может быть объяснено нелинейным характером процесса накопления повреждений, рассматриваемым в п. 7.3. Хотя отклонения от линейного правила не кажутся такими уж критическими. Здесь же явно видно, что образцы проявляют нелинейное поведение при накоплении повреждений. Вывод напрашивается сам собой. Если повреждение накапливается по нелинейному правилу, то нет смысла ожидать качественных результатов по ИКУ для линейного правила. Скажем заранее, что если бы использовались аналоги ИКУ для функций сопротивления усталости, изучаемых в гл. 6–7, то результаты получились более удовлетворительными.

И последнее. Процедура оценки распределения остаточного ресурса может быть использована для последовательных процедур остановки эксплуатации (типа рассмотренной в гл. 2), если отслеживается история нагружения и установлено то или иное правило накопления повреждений. То есть на каждом периоде эксплуатации дается оценка накопленному повреждению, предсказывается остаточный ресурс и принимается решение об остановке или продолжении эксплуатации, исходя из экономических соображений.

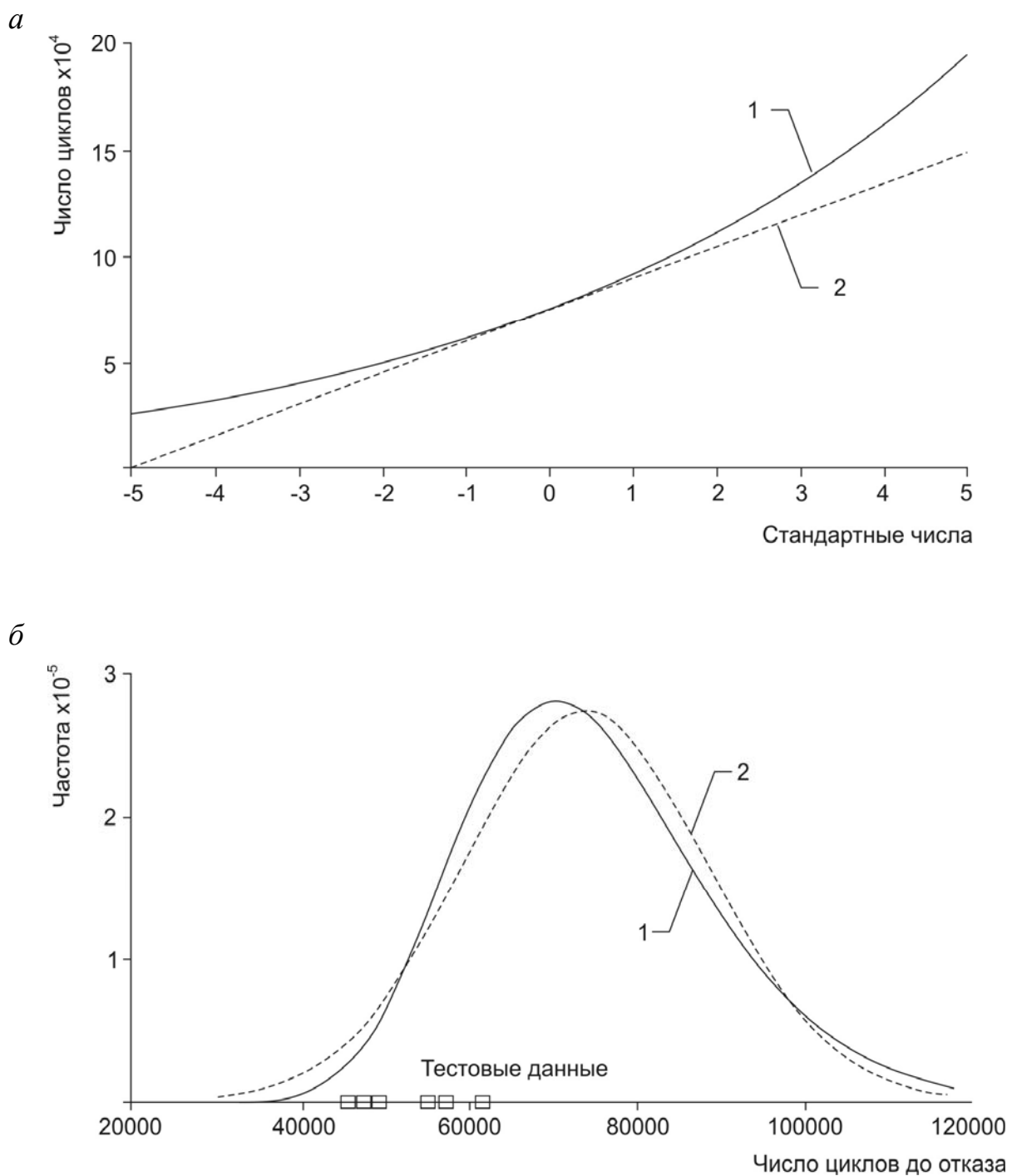


Рис. 5.5.1. Оценка остаточного ресурса образцов
из конвейерной ленты ТА 300/8:

a – функция $\varphi(\bullet)$; *б* – плотности распределения; 1 – ИКУ, относящиеся к нелинейной модели, 2 – линеаризованный вариант

5.5.3. Распределение ресурса при стационарном процессе нагружения

Рассмотрим теперь случай, когда образец подвергается случайному стационарному процессу нагружения и задача состоит в том, чтобы найти его распределение ресурса. Прежде всего необходимо прийти к соглашению, что характеризует процесс нагружения в этом случае. В соответствии с данной моделью нагрузка считается полностью заданной, если за некоторый период времени известны гистограмма амплитуд $f(s)$ и общее количество циклов нагружения n . $f(s)$ может быть как гистограммой, так и некоторой аппроксимированной функцией.

Тогда единичный цикл нагружения определяется по (4.2.1) как имеющий случайную амплитуду, распределенную по $f(s)$, при условии, что принято линейное правило накопления повреждений. Ресурс N исчисляется в сосчитанных циклах нагружения как обратная величина к повреждению μ : $N = 1 / \mu$. Тот же самый подход принимается для блочного нагружения, когда μ имеет смысл повреждения, накопленного за блок нагружения, а ресурс N есть количество блоков нагружения до отказа. Таким образом, повреждение μ и ресурс N являются случайными величинами на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. С другой стороны, они определяются как среднее по амплитудам нагружения.

Случайное единичное повреждение и соответствующий ему ресурс могут быть определены с помощью уравнения (4.2.1) следующим образом:

$$\mu = \int_{s_1}^{s^u} \frac{f(s)ds}{10^{\sigma_s \xi + m_s}} = \int_{s_1}^{s^u} f(s) 10^{-\sigma_s \xi - m_s} ds = \int_{s_1}^{s^u} 10^{-\sigma_s \xi - m_s + \log f(s)} ds$$

и

$$N = \left(\int_s^{s^u} 10^{-\sigma_s \xi - m_s + \log f(s)} ds \right)^{-1}. \quad (5.5.12)$$

Основной вопрос здесь таков. Если начальные распределения ресурса N_s , $s \in S$, при регулярном нагружении заданы как логнормальные, то каким будет распределение ресурса, задаваемое уравнением (5.5.12), при случайном стационарном процессе нагружения? Ответим: распределение ресурса N также будет логнормальным. Заметим, что для N может быть по-

строено равенство с использованием интегральной теоремы о среднем (требуется только непрерывность σ_s на S). Если обозначить это значение как $\sigma(s')$, уравнение (5.5.12) приводится к виду

$$N = \left(\int_{s_1}^{s^u} 10^{-\sigma_s \xi - m_s + \log f(s)} ds \right)^{-1} = \left(10^{-\sigma(s') \xi} \int_{s_1}^{s^u} 10^{-m_s + \log f(s)} ds \right)^{-1}.$$

Взяв логарифм от N , получим

$$\log N = \sigma(s') \xi - \log \int_{s_1}^{s^u} 10^{-m_s + \log f(s)} ds.$$

Следовательно, если $\xi \in N(0, 1)$, то $N \in \text{LN}[\int_{s_1}^{s^u} 10^{-m_s + \log f(s)} ds, \sigma(s')]$, что

означает, что ресурс N – логнормальная переменная, даже если история нагружения представлена стационарным случайным процессом.

Предложена новая версия стохастической теории усталости, базирующаяся на индивидуальных кривых усталости, которая может быть использована для решения задач проектирования и мониторинга усталостных повреждений. Ее основное преимущество состоит в том, что все вычисления производятся строго в рамках теории вероятностей без привлечения каких-либо квантильных величин. Естественная интерпретация результатов экспериментов посредством ИКУ позволяет легко прогнозировать усталостное поведение образцов.

Сделаем некоторые общие выводы.

Было предложено два подхода к построению вероятностного пространства для моделирования усталостного поведения образцов: прямой метод (гл. 4) и обратный (гл. 5). Последний представляется более универсальным и теоретически обоснованным.

Существование ИКУ было показано, исходя из весьма общих предположений, которые не являются ограничительными для исследователей, желающих воспользоваться данными методами и логнормальным распределением ресурса элементов. Другие распределения также возможны; единственное требование к ним: быть распределениями одного типа.

ИКУ могут быть сконструированы как непосредственно по экспериментальным данным, так и по агрегированным данным, представленным в виде квантильных кривых усталости. Установлен способ превращения квантильных кривых в ИКУ.

Предложена процедура оценки остаточного ресурса, которая является вполне подходящей для использования в задачах оптимальной остановки (см. гл. 2) или других последовательных задачах принятия решения.

Доказано, что в случае случайного стационарного процесса распределение ресурса является логнормальным.

В результате исследований стало ясно, что сам процесс накопления повреждений должен иметь такие же, если не большие, права в вероятностной концепции накопления усталостных повреждений. Тем не менее, данный подход следует рассматривать как вполне рабочую версию для объяснения и моделирования усталостного феномена с вероятностной точки зрения.

5.6. Некоторые основные определения и формулировки теории вероятностей

Отдельно необходимо рассмотреть некоторые основные определения и формулировки теорем теории вероятностей, необходимых для поддержки результатов, полученных в гл. 4, 5. Не все теоремы являются настоящими теоремами. Некоторые из них представляют собой лишь формулировки утверждений, доказательство которых достаточно просто; но для удобства они все пронумерованы последовательно – безотносительно их важности и сложности доказательства.

Определение 5.6.1. Пусть $F_{s_1, \dots, s_n}(x_1, \dots, x_n)$, где $s_i \subseteq S \subseteq R$, $s_1 < s_2 < \dots < s_n$, $n \geq 1$, есть заданное множество конечномерных функций распределения. Говорится, что эти функции удовлетворяют условию согласованности, если для любого подмножества s_i , $i = 1, \dots, k$ из s_i , $i = 1, \dots, n$, $1 \leq k \leq n$, справедливо следующее уравнение:

$$F_{s_1, \dots, s_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{s_1, \dots, s_n}(x_1, \dots, x_k, +\infty, \dots, +\infty). \quad (5.6.1)$$

Теорема 5.6.1 (теорема Колмогорова). Пусть $F_{s_1, \dots, s_n}(x_1, \dots, x_n)$, где $s_i \in S \subseteq R$, $s_1 < s_2 < \dots < s_n$, $n \geq 1$, есть множество конечномерных функций распределения, удовлетворяющих условию согласованности. Тогда существуют вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ и случайная функция $Z = (N_s(\omega))_{s \in S}$, определенная на этом пространстве, такая, что вероятностная мера определяется как

$$P\{\omega: N_{s_1} \leq x_1, \dots, N_{s_n} \leq x_n\} = F_{s_1, \dots, s_n}(x_1, \dots, x_n), \omega \in \Omega. \quad (5.6.2)$$

Теорема 5.6.2. Для любой действительной функции m_s , $s \in S$, и любой действительной неотрицательной функции $C(s, t)$, $s, t \in S$, существует действительная гауссовская случайная функция $Z = (N_s(\omega))_{s \in S}$ с математическим $m_s = EN_s$ и ковариационной функцией $C(s, t)$.

Здесь предполагается, что $F_{s_1, \dots, s_n}(x_1, \dots, x_n)$ – n -мерное нормальное распределение, определяемое вектором математических ожиданий m_{s_1}, \dots, m_{s_n} и ковариационной матрицей $(C(s_j, s_k))$, $j, k = 1, \dots, n$. Для существования нормального распределения достаточно, чтобы матрица была неотрицательно определена. Этот факт следует из того, что любой подвектор нормального вектора нормально распределен и, следовательно, уравнение (5.6.1) выполняется.

Теорема 5.6.3. Коэффициент корреляции r_{XY} между двумя случайными величинами X и Y равен единице, т. е. $r_{XY} = \pm 1$, тогда и только тогда, когда существует два таких числа a и b , что

$$Y = aX + b. \quad (5.6.3)$$

Более того, существует случайная величина ξ с $m_\xi = 0$ и $\sigma_\xi = 1$ такая, что

$$\xi = \frac{X - m_X}{\sigma_X} = \pm \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}, \quad (5.6.4)$$

где выбор знака «+» или «−» зависит от знака r_{XY} .

Определение 5.6.2. Если семейство распределений $\{P_s, s \in S\}$ таково, что для любых двух распределений из этого семейства $F(x)$ и $G(x)$ можно найти такие константы a и b , что эти распределения и их плотности $f(x)$ и $g(x)$ оказываются связанными уравнениями

$$G(x) = F\left(\frac{x-b}{a}\right) \text{ и } g(x) = \left|\frac{1}{a}\right| f\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

тогда это семейство называется семейством распределений одного типа с параметрами масштаба a и смещения b .

В частности, такие распределения, как нормальное, равномерное, Коши, логистическое и т. д., принадлежат этому семейству.

Теорема 5.6.4. Если X и Y – случайные величины с распределением одного типа и существует такая действительная функция $\phi(\bullet)$, что $Y = \phi(X)$, то эта функция линейна и справедливы уравнения (5.6.3–5.6.4).

Теорема 5.6.5.

а) Если X – нормальная случайная величина и $Y = aX + b$, тогда Y также нормальна.

б) Если X – нормальная случайная величина и $Y = \lg X$, тогда Y является логнормально распределенной случайной величиной, и наоборот.

Теорема 5.6.6. Если существует функция распределения $F(x)$, заданная на действительной оси R , то существуют вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{J}, P)$ и случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ такая, что

1) выборочное пространство определяется как $\Omega = R$;

2) σ -алгебра есть Борелевское множество на $R : \mathfrak{J} = \mathcal{B}(R)$;

3) $\xi = \xi(\omega)$,

и существует единственная вероятностная мера P , определенная на (Ω, \mathfrak{J}) , для которой $P(a, b] = F(b) - F(a)$, $a < b$.

Таким образом построена случайная величина $\xi = \xi(\omega)$, определенная на $(\Omega, \mathfrak{J}, P)$ и соответствующая $F(x)$, причем справедливо следующее соотношение:

$$P\{\omega : \xi(\omega) \leq x\} = P\{\omega : \omega \leq x\} = P(-\infty, x) = F(x).$$

Глава 6. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССОВ ДЕГРАДАЦИИ

Предлагается новый подход к проблемам моделирования процессов деградации, основанный на теории алгебраических автоматов, который можно использовать при решении инженерных задач феноменологической механики разрушения. Изучаются методы преобразования правил накопления повреждений в единые алгоритмы детерминированных и вероятностных автоматов на примере усталостного разрушения. Эта формализация может быть использована в задачах мониторинга онлайн, когда необходимо оценивать кумулятивное повреждение в течение работы МС и принимать адекватные решения по ее обслуживанию. Данный подход также обеспечивает решение проблем прогнозирования ресурса на стадии проектирования. Преимущественно изучена интерпретация с помощью алгебраических автоматов правил накопления ненаблюдаемых усталостных повреждений. Другие процессы деградации могут быть промоделированы таким же образом при помощи предлагаемой формализации с помощью метода пространства состояний, который не является ограничительным. Рассмотрена также тесная связь между автоматами и объектно-ориентированным программированием.

Понятие повреждения используется многими исследователями как основное при оперировании определениями, касающимися состояния образцов. Другие пытаются ввести эквивалентные понятия типа «функции истощения» [114], «кривые надежности» [135], «расходование ресурса» [16] и т. д. Можно заметить, что ключевым словом для всех моделей остается слово «состояние», поскольку именно это понятие является базовым для общей теории систем [29]. Состояние объекта может рассматриваться как параметр, объединяющий каждую пару входных и выходных сигналов так, что выходной сигнал определяется единственным образом по входному сигналу и состоянию. Если взять эти рассуждения за основу, то можно переформулировать любую модель деградации с помощью эквивалентного метода пространства состояний. Главное свойство состояния заключается в том, что оно отделяет будущее объекта от прошлого.

В данной главе продолжена основная линия работы – моделирование случайного поведения образцов с помощью врожденных усталостных свойств на основе рандомизированного вероятностного автомата.

6.1. Моделирование накопления повреждений с помощью алгебраических автоматов

Общим подходом в методах подсчета числа циклов усталостного нагружения является представление нерегулярной нагрузки $s(t)$ сначала последовательностью максимумов и минимумов, а затем последовательностью приведенных (эквивалентных) амплитуд нагружения. Пусть $s(t)$, $0 \leq t \leq T$, – непрерывная функция нагружения.

Определение 1. История нагружения образца определяется как последовательность выделенных циклов нагружения с различными амплитудами s_i : $s = (s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$. История нагружения номера N это такая $s = (s_1, s_2, \dots, s_N)$, которая приводит образец в состояние отказа при числе циклов N . Единичная история нагружения определяется как история с одним циклом нагружения.

Последнее означает, что любая история нагружения есть некоторый набор единичных историй.

В математике существует формальный эквивалент введенным историям нагружения – полугруппы.

6.1.1. Полугруппы историй нагружения

Единичная история нагружения с амплитудой цикла нагружения s идентифицируется со свободным генератором полугруппы.

Определение 2. Пусть S есть некоторое множество, а \circ есть операция отображения из $S \times S$ в S такая, что для любых $s_1, s_2, s_3 \in S$ справедливо следующее равенство:

$$(s_1 \circ s_2) \circ s_3 = s_1 (s_2 \circ s_3). \quad (6.1.1)$$

Такая пара $\langle S, \circ \rangle$ называется полугруппой, а \circ – полугрупповой операцией.

В нашем случае полугрупповая операция интерпретируется следующим образом: к любой истории нагружения может быть приписана справа или слева какая-либо другая история нагружения. Существует также нулевой элемент полугруппы e , т. е. единичная история нагружения с нулевой амплитудой. За него также можно принять (при наличии предела выносливости) любой цикл нагружения с амплитудой меньше предела выносливости. Все подобные циклы считаются неразличимыми нулями. Операция \circ обладает свойством ассоциативности (6.1.1) по определению. Однако сле-

дует отметить, что в общем случае \circ не обладает свойством коммутативности: $s_1 \circ s_2 \neq s_2 \circ s_1$. В терминах механики разрушения это означает, что не следует пренебрегать порядком приложения историй нагружения.

Любая история нагружения может быть разложена в подистории: $s = s_1 \circ s_2$, в частности, s_1 или s_2 может быть равна единичной истории нагружения e .

6.1.2. Алгебраические автоматы

Свободные полугруппы тесно связаны с теорией алгебраических автоматов [11, 12]. Если рассматривается усталостное поведение образца при некоторой истории нагружения, то история нагружения становится входом, моделируемым полугруппой; внутреннее накопленное повреждение ассоциируется некоторым образом с состоянием, а в качестве выхода служит информация об отказе или неотказе образца. Переформулируя подобным образом задачу накопления повреждений, мы получаем возможность использовать все достижения современной теории автоматов. Таким образом, образец накапливает повреждение так же, как некоторый абстрактный автомат изменяет свое состояние. Следует отметить, что мы не приравниваем кумулятивное повреждение к внутреннему состоянию во всех случаях. Как будет ясно далее, выбор параметров состояния делается, исходя из удобства моделирования и объектно-ориентированного программирования.

Для ясности будем считать пока, что образец накапливает повреждение так же, как автомат изменяет свое состояние в зависимости от истории нагружения на входе и предыдущего состояния, которое было достигнуто перед тем, как история была приложена.

Определение 3. Чтобы задать автомат, необходимо указать три множества:

- множество входов S ;
- множество состояний A ;
- множество выходов F .

А также две функции, соединяющие эти множества. Для каждого входа и каждого состояния первая описывает определенное внутреннее состояние, а вторая определяет выход:

$$g(s, a) \in A, f(s, a) \in F, s \in S, a \in A.$$

Эта пятерка $\langle S, A, F, g, f \rangle$ и определяет алгебраический автомат.

Множество выходов F рассматривается здесь как пара $\{f_0, f_1\} = \{0, 1\}$, где 0 приписывается неповрежденному образцу, а 1 – отказу.

Опишем функционирование автомата. Пусть, например, автомат находится во внутреннем состоянии a , и на его вход поступает сигнал s_1 , а затем последовательно s_2 . После воздействия s_1 автомат переходит в новое состояние $a_1 = g(s_1, a)$, а на выходе возникает сигнал $f_j = f(s_1, a)$, $j = 0, 1$. Следующий сигнал на входе s_2 заставит автомат во внутреннем состоянии a_1 и преобразует его в состояние

$$a_2 = g(s_2, a_1) = g(s_2, g(s_1, a)). \quad (6.1.2)$$

Сигнал на выходе также изменяется:

$$f_j = f(s_2, a_1) = f(s_2, g(s_1, a)). \quad (6.1.3)$$

Это свойство функций состояния и выхода называется совместимостью.

Функция состояния не всегда аддитивна, т. е. следующее равенство выполняется лишь в зависимости от задачи накопления повреждений:

$$g(s_1 \circ s_2, a) = g(s_1, a) + g(s_2, a). \quad (6.1.4)$$

Оказывается, приведенное здесь описание функционирования автомата легко позволяет представить процесс накопления повреждений с использованием вычислительной техники. Свойство совместимости, вытекающее из равенств (6.1.2–6.1.3) при данном способе моделирования накопления повреждений означает, что усталостное поведение автомата зависит только от настоящего состояния и будущей истории нагружения. Это свойство при использовании случайного подхода называется марковским свойством – именно на нем непосредственно основана теория вероятностных автоматов. В более общем случае зависимости автомата могут быть увеличены до определенного числа шагов – такой автомат называется автоматом с конечной памятью.

Приведенные ниже примеры продемонстрируют возможность при таком подходе преобразовывать любую детерминированную гипотезу накопления усталостных повреждений: Генри, Марко – Старки, Мэнсона и др.

Пример 1. Рассмотрим детерминированное линейное правило накопления повреждений. Для того чтобы задать автомат, необходимо знать две функции. Цикл с амплитудой s вызывает повреждение $1/N_s$, где N_s – значение средней кривой усталости в стандартной форме (при истории нагружения с постоянной амплитудой s). Следуя другим допущениям, предполагаем, что кумулятивное повреждение, если прикладывается нерегуляр-

ная нагрузка, не зависит от порядка ее приложения. Таким образом, функция состояния $g(s, a)$ представляется в следующей форме:

$$g(s, a) = a + g(s), \text{ где } g(s) = \frac{\sum n_i}{N_{s_i}}. \quad (6.1.5)$$

Состояние a есть некоторое число между 0 и 1. Если образец, представленный для испытаний, абсолютно не поврежден, то $a = 0$. Уравнение (6.1.5) означает, что $g(s)$ действует следующим образом: каждый цикл истории нагружения вызывает повреждение $\frac{1}{N_{s_i}}$; если имеется число циклов на-

гружения n с одинаковой амплитудой, то результирующие повреждения могут быть сгруппированы. Поэтому и появляется сумма в уравнении (6.1.5) и уравнение аддитивности (6.1.4) вполне выполняется.

Небольшая поправка уравнения (6.1.5) дает нам модифицированное правило накопления повреждений, которое уже не является линейным:

$$g(s, a) = a + g(s), \text{ где } g(s, a) = \frac{1-a}{N_s}. \quad (6.1.6)$$

Это свидетельствует о том, что мы легко можем манипулировать функциями состояния и создавать новые формы моделей накопления повреждений.

Функция выхода (отказа) образца может быть записана в следующем виде:

$$f(s, a) = \begin{cases} 0, & a + \sum_i \frac{n_i}{N_{s_i}} < 1 \\ 1, & \sum_i \frac{n_i}{N_{s_i}} \geq 1 \end{cases}. \quad (6.1.7)$$

Пример 2. Здесь рассмотрим гипотезу Генри [39]. За величину, характеризующую состояние системы, следует взять изменяющийся предел выносливости E . Если начальный предел выносливости равен a_0 и приложена история нагружения с n циклов, имеющих амплитуду s , тогда функция состояния задается как

$$a_1 = g(s, a_0) = \frac{s \left(1 - \frac{n}{N_s} \right)}{\frac{(s - a_0)}{a_0} + \left(1 - \frac{n}{N_s} \right)}. \quad (6.1.8)$$

Уравнение (6.1.8) вычисляется последовательно, т. е. для следующей истории нагружения предел выносливости a_1 становится начальным значением и уравнение должно быть решено еще раз. Как результат получаем последовательность состояний (пределов выносливости): $a_0, a_1, \dots, a_i, \dots$. Функцией отказа является

$$f(s, a) = \begin{cases} 0, 1 - \frac{a_i}{a_{i-1}} < 1 \\ 1, 1 - \frac{a_i}{a_{i-1}} \geq 1 \end{cases}. \quad (6.1.9)$$

Отметим также, что, в частности, уравнение (6.1.7) может быть заменено на следующее, если рассматривается задача мониторинга:

$$f(s, a) = \begin{cases} 0, \text{ если все амплитуды из } s < \text{движущегося } a; \\ 1, \text{ если } s \text{ содержит амплитуду } \geq \text{движущегося } a. \end{cases} \quad (6.1.10)$$

6.1.3. Обсуждение

Как было показано, функции состояния и отказа не имеют строгих форм и зависят в основном от решаемых задач. Функции состояния и выхода могут иметь различные смысловые значения. Если в примере 1 п. 6.1.2 состояние связывалось с абстрактной величиной – повреждением, то в примере 2 – определялось при помощи значения механической величины – предела выносливости. Если в примере 1 выходной сигнал относился к оценке повреждения, то в примере 2 была возможна такая же интерпретация и, кроме того, посредством предела выносливости.

Представленное описание автомата, согласно принятой терминологии, является описанием автомата Мили. В работах (часто под разными именами) рассматриваются частные случаи описания автомата, которые получаются при помощи наложения ограничений на ту или иную составляющую автомата, указанных в определении 2 (п. 6.1.1). В частности, это может быть автомат без памяти: функция состояния $g(s, a)$ отсутствует и выход на каждом шаге зависит только от входного сигнала и не зависит от ранее полученных входных сигналов. Может быть предложен автономный автомат, в котором при фиксированном начальном состоянии автоматически определяется последовательность состояний и выходов вне зависимости от входных сигналов. Может рассматриваться автомат без выход-

ных сигналов, когда поведение определяется как состояние, изменяющееся от начала до конца, и автомат производит ответ только «да» или «нет». То есть приложение некоторой истории нагружения на вход автомата позволяет нам получить ответ на вопрос о том, приведет эта история к ответу «да» или «нет». Если автомат окажется в конечном состоянии или множестве конечных состояний, то ответ «да» и на выходе получается единица. Если «нет», тогда выход всегда нуль. Однако для такого описания автомата нам необходимо определить множество конечных состояний, что не всегда просто. Таким образом, ограничения, приводящие нас к автомату без выходных сигналов, не существенны сами по себе. Можно остановиться на форме описания автомата Мили с функцией $f(s, a)$, где выходной сигнал всегда нуль, а в конце, когда происходит отказ, – единица.

Следующий тип автомата, который можно использовать для решения задач накопления повреждений, является автомат Мура. Выходная функция есть сюръективное отображение множества состояний на множество выходов – как, например, в случае линейного накопления повреждений. Представление об автомате Мура как об автомате с независимым входом, однако, неверно. Для автомата Мура временная зависимость между состоянием и выходом другая, нежели для автомата Мили. Последний имеет выход, зависящий от входа и достигнутого состояния, который генерируется в момент перехода из состояния в состояние. В случае автомата Мура сначала формируется выход, а лишь затем меняется состояние.

Таким образом, можно заключить, что автомат Мили более пригоден для наших целей. Другие типы автоматов могут быть выведены из этих объектов при помощи принципов наследственности, как это будет показано далее.

6.2. Техника объектно-ориентированного программирования

Предыдущее теоретическое описание функционирования автомата находит продолжение в численных алгоритмах программирования. Объектно-ориентированное программирование (ООП) предоставляет свои ресурсы в качестве инструментального средства для решения этой задачи [97, 118]. Каждый компонент автомата – вход, состояние и выход – программируются естественным образом согласно принципам ООП: наследственность, инкапсуляция и полиморфизм. Эти принципы демонстрируются на рассматриваемой задаче накопления повреждений посредством языков программирования высокого уровня [129].

6.2.1. Входной сигнал

История нагружения является входным сигналом автомата (не путать с термином «input», зарезервированном в программировании). Свободный генератор полугрупп $\{s\}$ может рассматриваться как общий первичный предок, который является абстрактным объектным типом. Однако, лучше запрограммировать в качестве первичного предка объект, вырабатывающий случайные числа любого распределения вероятности; в результате получится некая история $s = (s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$, где s_i являются выборочными значениями независимой случайной величины. В компьютерной программе она названа «PrimaryHistory». История нагружения часто содержит повторяющиеся циклы с одинаковой амплитудой. В этом случае история нагружения, описанная определением 1 (см. п. 6.1), может быть переписана в виде пар амплитуд и числа циклов нагружения:

$$s = \{(s_1, n_1), (s_2, n_2), \dots, (s_i, n_i)\}, \quad (6.2.1)$$

где n_i также могут быть выборочными значениями случайной величины.

Этот новый объект является наследником предыдущего и называется «BlockHistoryRand». Другой объект – «BlockHistoryDet» – может быть построен от последнего предка, если при генерации чисел n_i будет использовано некоторое детерминистическое правило.

Помимо таких простых правил можно рассмотреть более сложные способы генерации историй нагружения, в частности, способ, основанный на реконструкции техники метода падающего дождя [115], который предполагает, что имеется матрица подсчитанных пиков и впадин с числами переходов с одного уровня на другой. Назовем этот объект «RainMatrixHistory». Можно предложить еще один объект – «MarkovMatrixHistory», основанный на марковской матрице [101, 106]. Новая ветвь дерева связей может быть построена на основе методов генерации случайных процессов при помощи техники, описанной в работе И. Рыхлика [132], или любых других, использующих авторегрессию.

6.2.2. Состояние

Принципы ООП применены также для программирования функций состояния. Исходный объект назван «PrimaryState». Он необходим для того, чтобы построить абстрактный объектный тип для генерации значений состояния по произвольной функции состояния как в равенстве (6.1.2). Линейное правило, задаваемое уравнением (6.1.5), образует наследника «LinearState». Правило по уравнению (6.1.6) образует «LinModState». Ме-

тод функций сопротивления усталости, описанный в п. 7.3, образует объект «FSFState». Иерархия объектов состояния приведена на рис. 6.2.1.

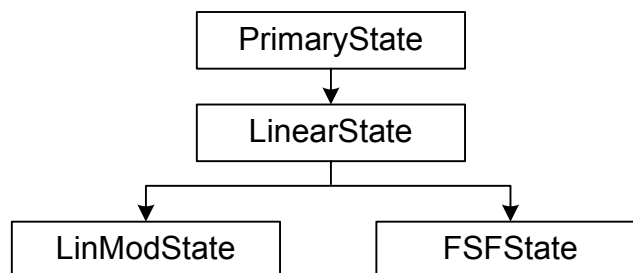


Рис. 6.2.1. Иерархия объектов состояния

6.2.3. Выходной сигнал

Для того чтобы указать, случился отказ или нет, необходимо ввести последнюю группу объектов, которые описывают выходной сигнал. Исходный предок назван «StateExceed»; его главная функция – проверка наличия отказа по уравнению (6.1.7). Наследуемые объекты – «StateExceed1», «StateExceed2»; используют методы уравнений (6.1.9–6.1.10).

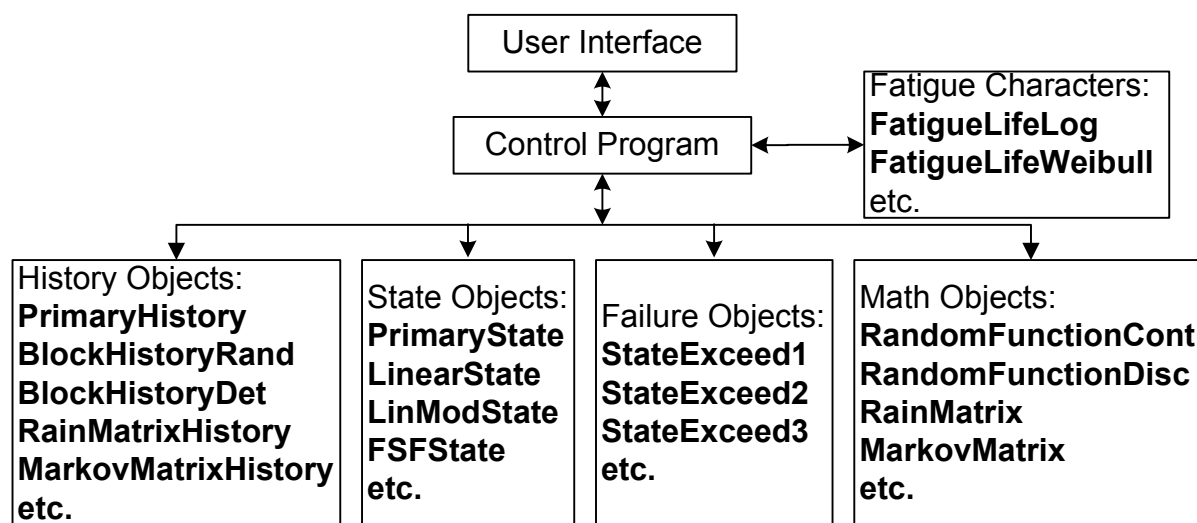


Рис. 6.2.2. Связи между программными модулями

Связи между программными модулями показаны на рис. 6.2.2. Мы не будем описывать их детально, чтобы не увеличивать объем работы. Для знакомства с техникой ООП может быть рекомендована книга Рубенкинга [129]. Отметим, что программирование этих объектов основано непосредственно на инкапсуляции, когда метод, т. е. функции и процедуры, тесно связаны с типами данных, и новые объекты наследуют и, кроме того, могут перекрыть некоторые методы предка. Объекты, рассмотренные ранее, также полиморфны. Это означает, что данные объекты имеют различные формы, но управляющая

программа вызывает любой виртуальный метод. И это именно тот метод, который нужен для нашего частного случая моделирования.

Иллюстративный пример. Рассмотрим более детально численный пример моделирования правил накопления усталостных повреждений с помощью алгебраических автоматов. В п. 7.3 рассматривается нелинейное правило накопления повреждений, которое определяет ресурс конвейерной ленты при сдвиговых деформациях.

Усталостное поведение образца ленты описывается функцией сопротивления усталости, которая имеет форму степенной функции и определяет постепенное снижение предела прочности, изменяющееся в процессе нагружения. Для историй нагружения с постоянной амплитудой s функция сопротивления усталости записывается в виде

$$a(s, n) = a_0 - (a_0 - s) \left[\frac{n}{N_s} \right]^{k(s)}, \quad (6.2.2)$$

где a_0 – начальный предел прочности;

n – число циклов нагружения;

N – усталостная долговечность, определенная по кривой усталости, заданной в виде

$$N_s = 10^{6,371-11,93s}, \quad 0,107 < s < 0,154, \\ k(s) = 3,74 + 9,49s - 83,6s^2. \quad (6.2.3)$$

Используя уравнение (6.2.1) в качестве выделенной истории нагружения и уравнение (6.2.2) как описание явления усталости, можно получить формальную функцию состояния для первого шага:

$$a_1 = g(\{s_1, n_1\}, a_0) = a_0 - (a_0 - s_1) \left[\frac{n_1}{N_{s_1}} \right]^{k(s_1)}$$

и для следующих шагов:

$$a_i = g(\{s_i, n_i\}, a_{i-1}) = a_0 - (a_0 - s_i) \left[\left(\frac{a_0 - a_{i-1}}{a_0 - s_i} \right)^{\frac{1}{k(s_i)}} + \frac{n_i}{N_{s_i}} \right]^{k(s_i)}. \quad (6.2.4)$$

Выходная функция тогда –

$$f(\{s_i, n_i\}, a_{i-1}) = \begin{cases} 0, & s_i < a_i \\ 1, & s_i \geq a_i \end{cases},$$

где a_i вычисляется по уравнению (6.2.4).

Таким образом, получены три последовательности, которые заканчиваются, когда первая единица появится в третьей последовательности (третий (нижний) ряд):

$$\begin{array}{ccccc}
 & \{s_1, n_1\} & \{s_2, n_2\} & \{s_i, n_i\} & \{s_N, n_N\} \\
 a_0 & a_1 & a_2 & a_i & a_N \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} .$$

Объект «FatigueLifeLog» содержит характеристики усталости и функции, которые подставляются в объекты состояний. Для моделирования поведения усталости образцов ленты были выбраны история «BlockHistoryRand» и три правила изменения состояния: «LinearState», «LinModState» и «FSFState». Подчеркнем здесь прежде всего простоту вычислений с нелинейными моделями накопления повреждений: усилия, требуемые для создания новой программы с новыми модулями, описывающими некоторые правила накопления повреждений, минимальны.

6.3. Рандомизированный автомат

Мы рассмотрели поведение детерминированных автоматов. Их пригодность для моделирования процессов детерминированного накопления повреждений вполне прозрачна. Придерживаясь перечня случайностей, приведенного в гл. 1, обозначим, что первой причиной случайного поведения образца являются его случайные начальные свойства.

Следовательно, наша прямая задача сейчас состоит в том, чтобы организовать такой стохастический автомат, который может преобразовать входную информацию, зависящую от начальных свойств каждого единичного автомата. Механический аспект этих требований был рассмотрен в гл. 4 и 5 (использование индивидуальных кривых усталости как возможной основы для стохастической теории усталости). Общая теория стохастических автоматов основана на марковском переходе функций от одного состояния к другому [12] (в дискретном случае имеется марковская переходная матрица) и, очевидно, связана с моделями накопления усталостных повреждений, использующих марковские процессы. Однако полностью стохастический автомат рассматриваться пока не будет. Ограничимся лишь случаем рандомизированного автомата, когда поведение автомата определено однозначно по некоторой случайной переменной ξ . Случайная величина точно не известна, и имеется только ее функция распределения.

Тогда для каждого возможного значения ξ имеется единственный путь изменения состояния, но какой именно путь реализуется в конкретном случае, мы не узнаем, пока не произойдет отказ.

Преобразуем определение 3, добавив в описание автомата новую переменную ξ с некоторой функцией плотности распределения $p(x)$, которая определяет стохастическое описание начальных свойств автомата. В рамках терминологии объектно-ориентированного программирования этот автомат является наследником и имеет следующее определение.

Определение 4. Рандомизированным автоматом является объект $\langle S, A, F, f, g, p \rangle$, где $p = p(x)$ – генерирующая функция распределения случайной величины ξ , определенной на вероятностном пространстве $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ со значениями в X , $x \in X$. Функция g стала $g(s, a, x)$, а f – $f(s, a, x)$, соответственно.

Функционирование рандомизированного автомата может быть описано следующим образом. В самом начале, перед стартом автомата, случайная величина ξ принимает выборочное значение x , и только затем автомат начинает функционировать, имея это значение в своей памяти. Отметим также, где содержится ξ в задаче накопления повреждений. Если принимается за основу теория индивидуальных кривых усталости, то эта переменная входит в описание усталостной долговечности в качестве нового компонента, т. е. $N = N(s, \xi)$ (см. гл. 5).

Иллюстративный пример. Чтобы лучше понять эту конструкцию, продолжим численный пример, рассмотренный в п. 6.2.3. Уравнения функции сопротивления усталости (ФСУ) (6.2.2–6.2.3) задаются с помощью обычной средней кривой выносливости. Чтобы преобразовать их в случайный объект, необходимо добавить уравнение для стандартного отклонения σ_s . Возьмем это уравнение из п. 7.3 и получим случайную ФСУ

$$N_s = 10^{6,371 - 11,93s + \xi(0,2 + 1,02s)}, \quad (6.3.1)$$

где ξ – стандартная нормальная величина.

Таким образом, численный метод работает применительно к данному автомату через добавление случайного уравнения (6.3.1) в описание усталостной долговечности. Первый шаг заключается в выработке выборочного значения x от ξ с использованием списка математических объектов. После этого вычисления выполняются точно так же, как и в примере из п. 6.2.3, до

проявления отказа (единицы на выходе). Данное действие должно быть повторено так много раз, как это требуется для получения значимой выборки величин ресурса, в том числе и для нерегулярных историй нагружения. В качестве входного сигнала была использована история нагружения с распределением амплитуд по закону Вейбулла. Результаты вычислений усталостного ресурса показаны на рис. 6.3.1.

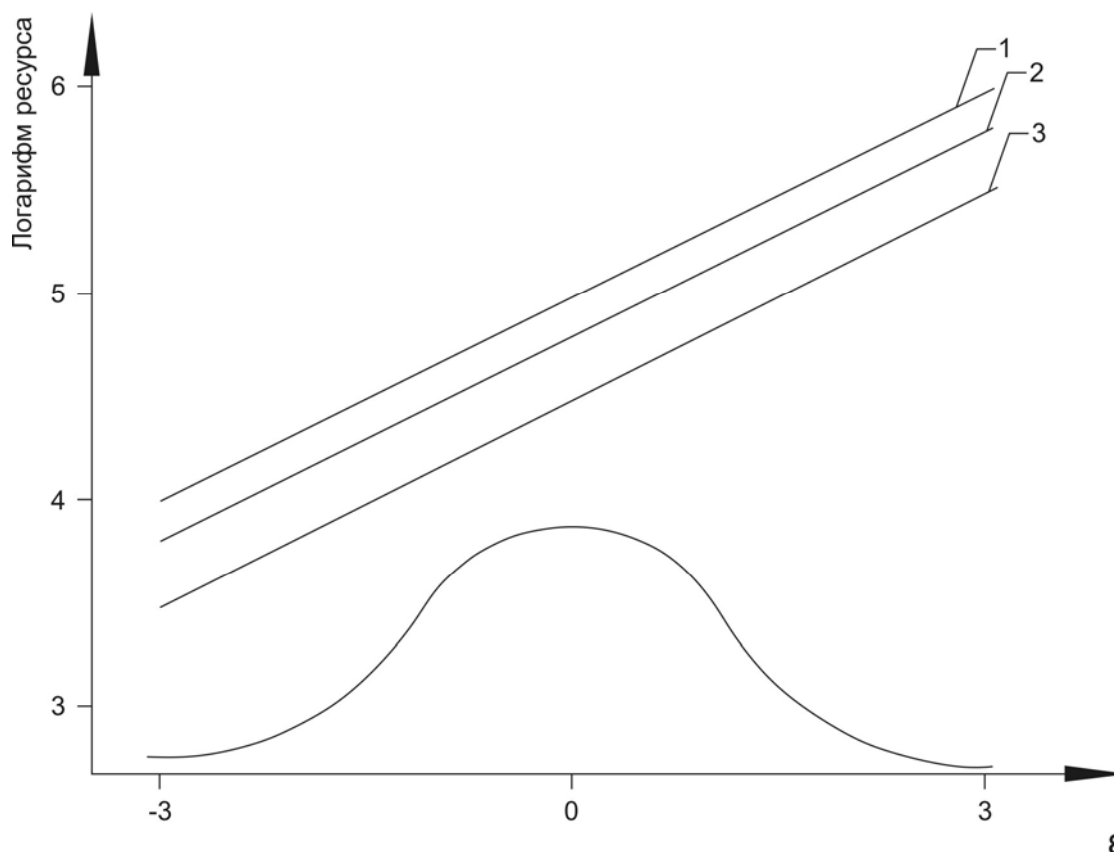


Рис. 6.3.1. Распределения ресурса для рандомизированного автомата на нормальной вероятностной бумаге:
1 – FSFState, 2 – LinModState, 3 – LinearState

Исследование усталостных разрушений осложнено, как правило, влиянием многочисленных факторов. В настоящее время существующие нелинейные гипотезы накопления повреждений не нашли широкого практического применения вследствие громоздкости вычислений и их недоказанной правомочности по отношению к тем или иным механизмам разрушения. Мы предложили новый взгляд на проблему моделирования кумулятивного усталостного повреждения с помощью алгебраических автоматов. Теоретическая модель, описанная выше и использующая алгебраический автомат, объединена с техникой ООП, что делает возможным уста-

новление связи между моделями накопления повреждений в механике, моделированием с помощью автоматов и программирования.

При использовании этого подхода:

- повышаются надежность и точность вычислительных процедур;
- любая новая модель повреждений может быть легко добавлена и изучено столько вариантов, сколько нужно;
- когда необходимо включить новый метод, не нужно корректировать текст программы, а должен быть создан лишь новый наследник; система является открытой с точки зрения развития и дополнения ее объектов и подсистем;
- объекты, созданные на языке программирования высокого уровня, могут быть многократно использованы без потери интерфейсных модулей и каких-либо других; хорошо отлаженные объекты могут многократно использоваться, а сфера их применения по мере необходимости – расширяться;
- каждая группа объектов может работать независимо и совместима с другими объектами;
- присутствие в ООП инкапсуляции, наследования и полиморфизма позволяет комбинировать и сопоставлять различные теории, что дает большой материал для анализа как искомой долговечности, так и самих нелинейных правил накопления повреждений.

Глава 7. ОПТИМИЗАЦИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЕСУРСА ДЕТАЛЕЙ И УЗЛОВ МАШИН

В данной главе рассматривается практическое применение методов оптимального управления процессами деградации и прогнозирования ресурса различных деталей и узлов машин, изучавшихся в предыдущей части работы. Сразу отметим, что любая постановка подобной задачи не только неизбежно приводит к обогащению теоретических знаний, но и требует дополнительных усилий как по статистической обработке экспериментальных данных, так и по корректировке и формированию некоторых новых результатов для поддержания общей идеологии управления.

7.1. Предельно допустимый уровень процесса деградации элемента, моделируемый марковской цепью

Рассматривается задача оптимизации предельно допустимого уровня значения процесса деградации на примере построения моделей технического обслуживания шпинделя прокатного стана горячей прокатки ГП2000 и рамных пил, используемых в лесопильном производстве. Для описания процессов деградации используется простейшая марковская цепь. Ниже изучаются две задачи управления: управление по степени износа вкладыша шпинделя стана горячей прокатки и управление по значениям сигнала акустической эмиссии, генерируемых в рамных пилах в процессе их эксплуатации. Статистическая оценка параметров производится на основе потрассекторного метода.

Предполагаем, что множество состояний элементов дискретно и максимальное значение, при котором происходит отказ элемента, равно некоторому целому числу n . Известно, что оптимальной политикой управления по предельно допустимому значению является следующая [120]: а) если по достижению процессом деградации Z состояния m единственное действие состоит в остановке и замене элемента, то для любого состояния в множестве $V = \{m, m + 1, \dots, n\}$ следует производить замену; б) для всех состояний i , $0 < i < m$, политика управления состоит в дальнейшем отслеживании состояния без совершения каких-либо действий.

7.1.1. Моделирование износа вкладыша шпинделя

Исследуем процесс износа вкладыша шпинделя стана горячей прокатки. На основе равных периодов инспекции состояния вкладыша (10 дней по принятой на Магнитогорском металлургическом комбинате технологии) измерялись значения износа вкладыша, которые варьировались в пределах от 0,00 до 1,52 мм. Всего было получено 35 реализаций процесса деградации. Последовательности значений величины износа были существенно неоднородными. На рис. 7.1.1 изображены некоторые реализации процесса. Так, например, видно, что одни имели достаточно сглаженный характер, а другие обрывались почти сразу после начала эксплуатации. Обратим внимание на концепции, представленные в гл. 4 и 5, где были промоделированы врожденные усталостные свойства элементов. Такое расхождение реализаций процессов, как на рис. 7.1.1, также, по-видимому, может быть объяснено начальной неидентичностью образцов по своим свойствам сопротивления износу. Последние точки последовательностей – это точки превентивной замены или отказа вкладыша.

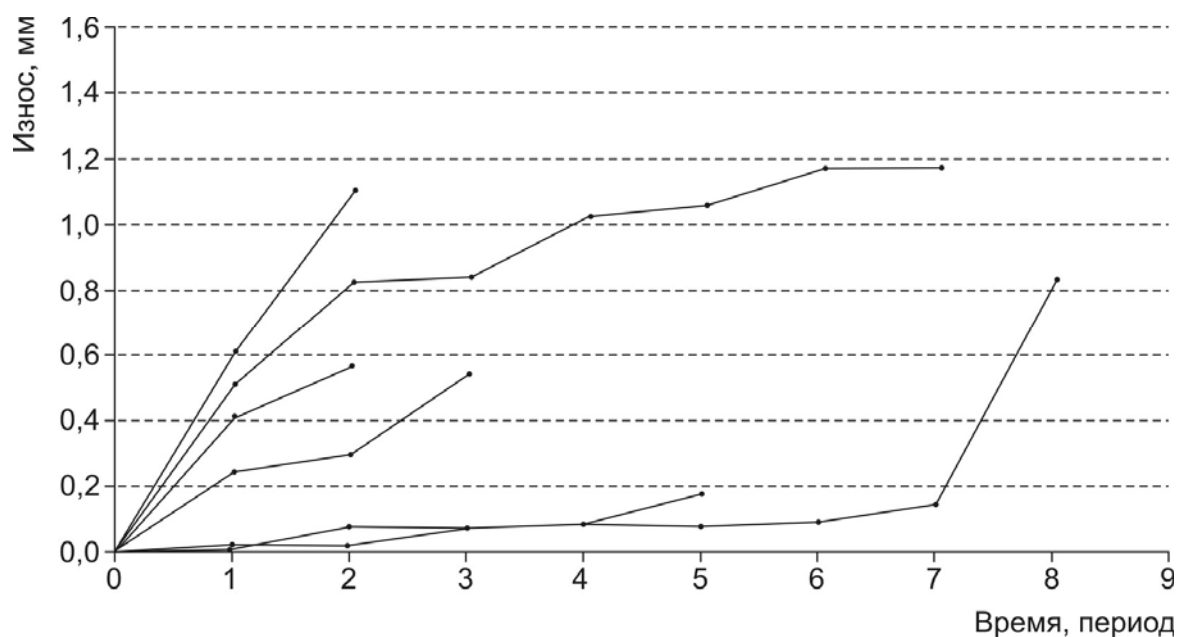


Рис. 7.1.1. Некоторые реализации процесса деградации и правило дискретизации

Обозначим исходные предположения. Итак, имеются дискретные точки измерения величины износа поверхности вкладыша во времени. Дополнительно введем дискретное пространство состояний процесса деградации

$\{0, 1, \dots, n\}$ и попытаемся найти переходные вероятности марковской цепи из одного состояния в другое. Пусть каждое состояние $i, i = 0, 1, \dots, n - 2$, пространства состояний соответствует величине износа $[0,2 + 0,2i, 0,2 + 0,2(i + 1))$, измеряемого в миллиметрах. Сетка линий на рис. 7.1.1 иллюстрирует правило выделения дискретного пространства состояний. Таким образом, у нас имеется восемь состояний деградации: $i = 0, 1, \dots, 7$. Дополним это пространство двумя поглощающими состояниями: 8 соответствует превентивной замене вкладыша, а 9 – его отказу. Введения двух поглощающих состояний достаточно для того, чтобы отделить превентивные замены от замен по причине отказа. 35 реализаций преобразованных в дискретные состояний приведены в табл. 7.1.1. Арифметическое среднее процесса деградации Z как функция времени вместе с 95 %-ми доверительными интервалами показано на рис. 7.1.2 (используются величины Стьюдента). Общее время осмотра T не превышало 11 периодов. Следует отметить, что для периодов осмотра 10 и 11 соответствующие доверительные интервалы для средних показывают неопределенность: оказаться в конце эксплуатации в состоянии 8 (замена) или 9 (отказ). Из анализа данных реализаций известно, что в 57 % случаев замена вкладыша производится после его отказа.

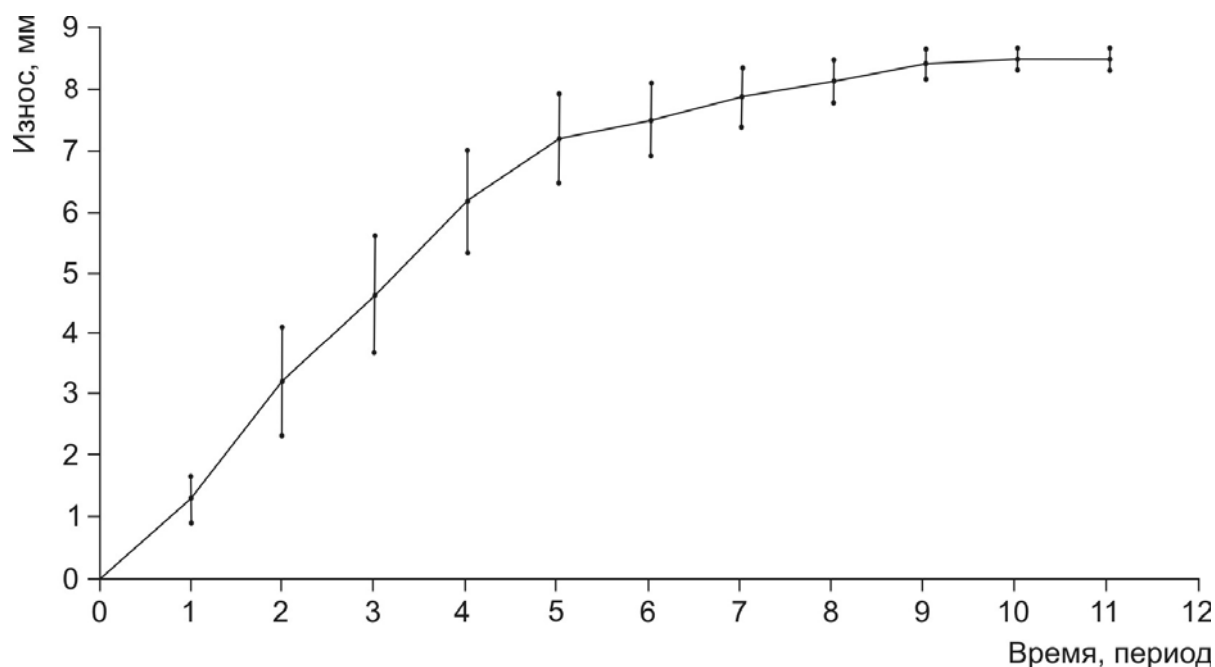


Рис. 7.1.2. Среднее процесса и 95 %-е доверительные интервалы

Таблица 7.1.1

Преобразованные последовательности состояний

0	1	1	2	3	9	9	9	9	9	9	9
0	1	2	3	8	8	8	8	8	8	8	8
0	0	0	1	8	8	8	8	8	8	8	8
0	2	4	4	8	8	8	8	8	8	8	8
0	3	3	3	6	7	7	7	7	9	9	9
0	0	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
0	0	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
0	2	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9
0	0	1	9	9	9	9	9	9	9	9	9
0	1	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
0	0	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
0	3	4	5	9	9	9	9	9	9	9	9
0	2	5	5	6	9	9	9	9	9	9	9
0	3	4	7	8	8	8	8	8	8	8	8
0	0	0	9	9	9	9	9	9	9	9	9
0	1	3	4	4	9	9	9	9	9	9	9
0	2	4	9	9	9	9	9	9	9	9	9
0	3	4	4	7	7	7	9	9	9	9	9
0	3	4	5	6	9	9	9	9	9	9	9
0	1	4	5	7	8	8	8	8	8	8	8
0	3	3	4	6	9	9	9	9	9	9	9
0	0	2	3	3	4	5	7	8	8	8	8
0	2	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
0	1	1	2	8	8	8	8	8	8	8	8
0	2	2	3	3	4	5	6	6	8	8	8
0	1	1	3	6	9	9	9	9	9	9	9
0	1	2	2	5	5	7	8	8	8	8	8
0	2	2	4	4	5	5	9	9	9	9	9
0	2	4	5	5	5	8	8	8	8	8	8
0	0	1	1	1	3	3	4	6	9	9	9
0	1	2	3	4	5	6	7	9	9	9	9
0	1	1	1	3	6	6	7	8	8	8	8
0	0	2	3	5	6	6	6	6	9	9	9
0	1	1	2	4	5	6	6	7	8	8	8

7.1.2. Проверка гипотез

Чтобы убедиться, что так преобразованный процесс износа является однородной марковской цепью первого порядка, необходимо воспользоваться методами проверки статистических гипотез. Обратимся к оценке максимального правдоподобия и их асимптотическим распределениям для переходных вероятностей марковской цепи произвольного порядка при условии, что известно несколько реализаций процесса изменения состояния [95].

Для марковской однородной цепи первого порядка с матрицей переходных вероятностей $P = (p_{ij})$, $i, j = 0, 1, \dots, 9$, оценки максимального правдоподобия для переходных вероятностей определяются как

$$\hat{p}_{ij} = n_{ij} / n_i. \quad (7.1.1)$$

Если цепь неоднородна по времени, то соответствующие оценки представляются в виде

$$\hat{p}_{ij}(t) = n_{ij}(t) / n_i(t). \quad (7.1.2)$$

Здесь как $n_{ij}(t)$ обозначено число последовательностей, прошедших через состояния i, j за время от $(t-1)$ до t , где $t \in [1, T]$. Значит, теперь можно составить следующие соотношения:

$$n_i(t-1) = \sum_{j=0}^n n_{ij}(t), \quad n_{ij} = \sum_{t=1}^T n_{ij}(t), \quad n_i = \sum_{t=0}^{T-1} n_i(t). \quad (7.1.3)$$

Используя уравнения (7.1.1–7.1.3), получим оценки максимального правдоподобия по табл. 7.1.1 для переходных вероятностей однородной цепи, которые приведены в табл. 7.1.2 в виде матрицы \hat{P} .

Зная матрицу оценок переходных вероятностей, проверим гипотезу о том, что цепь является однородной и первого порядка, с помощью критерия отношения правдоподобия:

$$\lambda = \prod_t \prod_{i,j} [\hat{p}_{ij} / \hat{p}_{ij}(t)]^{n_{ij}(t)},$$

поскольку известно, что $-2\log\lambda$ имеет χ^2 распределение с n^2T степенями свободы. Воспользуемся тем, что вероятности $p_{ij}(t)$, организованные в таб-

лицу сопряженности, должны иметь в рядах для данного i мультиномиальное распределение [116], и поэтому можно использовать критерий χ^2 с меньшим числом степеней свободы:

$$\chi_i^2 = \sum_i n_i(t-1)[\hat{p}_{ij}(t) - \hat{p}_{ij}]^2 / \hat{p}_{ij}, i = 0, 1, \dots, n-1,$$

где χ_i^2 имеют χ^2 распределение с nT степенями свободы.

Таблица 7.1.2

Оценки переходных вероятностей марковской цепи

Состояния	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,26	0,32	0,21	0,13					0,02	0,06
1		0,38	0,29	0,17	0,04				0,04	0,08
2			0,23	0,27	0,23	0,14			0,09	0,05
3				,27	0,45	0,05	0,14		0,05	0,10
4					0,24	0,38	0,14	0,10	0,05	0,10
5						0,33	0,33	0,17	0,06	0,11
6							0,37	0,26	0,05	0,32
7								0,33	0,47	0,20
8									1	0
9									0	1

Если нулевая гипотеза, состоящая в том, что p_{ij} независимы от t , справедлива, то следующий шаг – проверка гипотезы о том, что порядок цепи меньше двух. Подобно уравнению (7.1.3) могут быть получены оценки максимального правдоподобия переходных вероятностей \hat{p}_{ijk} марковской цепи второго порядка. При нулевой гипотезе асимптотическое распределение

$$\chi_j^2 = \sum_{i,k} n_{ij}^* [\hat{p}_{ijk} - \hat{p}_{jk}]^2 / \hat{p}_{jk}, j = 0, 1, \dots, n-1$$

будет χ^2 распределением с n^2 степенями свободы, где

$$n_{ij}^* = \sum_{t=1}^{T-1} n_{ij}(t).$$

Используя критерии отношения максимального правдоподобия и χ^2 , мы вычислили, что гипотезы о первом порядке цепи и ее однородности по

времени не могут быть отвергнуты с уровнем значимости α равным 0,05. Таким образом, можно предполагать, что рассматриваемый преобразованный процесс является однородной по времени цепью Маркова первого порядка. Кроме того, известно, что она монотонна по определению.

Видно, что полученная матрица переходных вероятностей \hat{P} не отличается «хорошим» видом, что объясняется конечностью статистической выборки. Поэтому возможно слегка подкорректировать ее, чтобы она выглядела более презентабельно. Воспользуемся снова критерием χ^2 , чтобы проверить нулевую гипотезу о том, что $p_{ij} = p_{ij}^0, j = 0, 1, \dots, n - 1$, для данного i . При нулевой гипотезе

$$\chi_i^2 = \sum_j n_i [\hat{p}_{ij} - p_{ij}^0]^2 / p_{ij}^0, i = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (7.1.4)$$

имеет асимптотическое χ^2 распределение с n степенями свободы. Введем следующие гипотезы.

1. Вероятность того, что цепь останется в том же самом состоянии, $p_{ii}^0 = 0,3$ для $i = 0, \dots, 7$.
2. Вероятность того, что цепь перейдет в соседнее состояние, $p_{ii+1}^0 = 0,3$ для $i = 0, \dots, 6$.
3. Вероятность того, что цепь перейдет в следующее за соседним состояние, $p_{ii+2}^0 = 0,2$ для $i = 0, \dots, 5$.
4. Вероятность $p_{ii+3}^0 = 0,1$ для $i = 0, \dots, 4$.
5. Равные вероятности оказаться в поглощающих состояниях $p_{i8}^0 = 0,05$ для $i = 0, \dots, 5$ и $p_{i9}^0 = 0,05$ для $i = 0, \dots, 4$.
6. В состояниях 5 и 6 увеличена вероятность оказаться в состоянии отказа 9 по сравнению с вероятностью оказаться в состоянии превентивной замены 8: $p_{58}^0 = 0,05$, $p_{59}^0 = 0,15$, $p_{68}^0 = 0,1$, $p_{69}^0 = 0,3$; поскольку, если обслуживающий персонал не произвел надлежащую превентивную замену в этих состояниях оборудования вовремя, то процесс деградации имеет большую возможность сразу перейти в состояние отказа 9.
7. В состоянии 7 $p_{78}^0 = 0,5$, а $p_{79}^0 = 0,2$; вероятность p_{78}^0 больше вероятности p_{79}^0 , поскольку, если элемент оказался в состоянии 7, которое очень близко к отказовому, то обслуживающий персонал делает все возможное, чтобы избежать отказа.

Задаваемая матрица переходных вероятностей P^0 и вычисленные значения χ^2 приведены в табл. 7.1.3.

Таблица 7.1.3

Задаваемая матрица переходных вероятностей

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N	χ^2
0	0,3	0,3	0,2	0,1					0,05	0,05	5	,43
1		0,3	0,3	0,2	0,1				0,05	0,05	5	1,97
2			0,3	0,3	0,2	0,1			0,05	0,05	5	1,58
3				0,3	0,3	0,2	0,1		0,05	0,05	5	4,13
4					0,3	0,3	0,2	0,1	0,05	0,05	5	2,13
5						0,3	0,3	0,2	0,05	0,15	4	,42
6							0,3	0,3	0,01	0,30	3	,82
7								0,3	0,5	0,2	2	,07
8									1	0		
9									0	1		

Из табл. 7.1.3 видно, что задаваемые переходные вероятности p_{ij}^0 могут быть приняты с высоким доверительным уровнем.

Чтобы оценить неопределенности в определении \hat{p}_{ij} , попытаемся найти доверительные интервалы, покрывающие истинные значения p_{ij} с определенным уровнем доверия.

Известно, что переменные $\sqrt{n_i}(\hat{p}_{ij} - p_{ij})$ для n различных значений i являются асимптотически независимыми и имеют предельное совместное нормальное распределение со средним, равным нулю. Дисперсии $p_{ij}(1 - p_{ij})$ и ковариации $\delta_{ig}p_{ij}p_{gh}$, где $\delta_{ig} = 0$, если $i \neq g$, и $\delta_{ig} = 1$, если $i = g$, получаются точно так же, как и для мультиномиального распределения.

Во-первых, найдем доверительные интервалы для каждой пары i, j , используя тот факт, что предельное маргинальное распределение $\sqrt{n_i}(\hat{p}_{ij} - p_{ij})$ также является нормальным. Как и в случае биномиального распределения, можно утверждать с вероятностью $(1 - \alpha)$, что

$$-a \leq \frac{\sqrt{n_i}(\hat{p}_{ij} - p_{ij})}{p_{ij}(1 - p_{ij})} \leq a,$$

где $\Phi(a) = 1 - \frac{1}{2}\alpha$, причем $\Phi(a)$ имеет стандартное нормальное распределение.

Следовательно, с вероятностью $(1 - \alpha)$ справедливы неравенства

$$\hat{p}_{ij} \leq p_{ij} + ap_{ij}(1 - p_{ij})/\sqrt{n_i}, \quad \hat{p}_{ij} \geq p_{ij} - ap_{ij}(1 - p_{ij})/\sqrt{n_i}$$

и доверительный интервал для \hat{p}_{ij} есть интервал $[v_1, v_2]$:

$$v_1, v_2 = \frac{\hat{p}_{ij} + a^2/2n_i \pm \sqrt{\hat{p}_{ij}(1 - \hat{p}_{ij})a^2/n_i + (a^2/2n_i)^2}}{1 + a^2/n_i}. \quad (7.1.5)$$

Пусть $a = 2$, что примерно соответствует $(1 - \alpha)$ при $\alpha = 0,05$. Левые и правые границы 95 %-х доверительных интервалов для оценок максимального правдоподобия \hat{p}_{ij} приведены в табл. 7.1.4.

Частные доверительные интервалы, полученные для каждой p_{ij} , могли бы быть, в общем, заменены более точными доверительными интервалами, поскольку \hat{p}_{ij} не являются независимыми относительно друг друга. Как уже было упомянуто ранее, множество переменных $\sqrt{n_i}(\hat{p}_{ij} - p_{ij})$ для различных i являются независимыми асимптотически и имеют совместное нормальное распределение. Следовательно, для каждого i можно найти доверительный эллипсоид посредством ковариационной матрицы. Все эллипсоиды мы приводить не будем, но, чтобы продемонстрировать эту общую процедуру для матрицы \hat{P} , найдем доверительный эллипс ($\alpha = 0,05$) для оценок \hat{p}_{77} и \hat{p}_{78} , причем \hat{p}_{79} есть зависимая переменная: $\hat{p}_{79} = 1 - (\hat{p}_{77} + \hat{p}_{78})$. Итак,

$$\frac{(p_{77} - \hat{p}_{77})^2}{\sigma_1^2} - 2\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2}(p_{77} - \hat{p}_{77})(p_{78} - \hat{p}_{78}) + \frac{(p_{78} - \hat{p}_{78})^2}{\sigma_2^2} = 6(1 - \rho^2),$$

где ρ – коэффициент корреляции;

σ_1 и σ_2 – стандартные отклонения.

Если вместо точных значений дисперсии и ковариации, использованных при построении эллипсоида, изображенного на рис. 7.1.3, воспользоваться приближительными значениями, заданными уравнением (7.1.5), то этот рисунок дополняется прямоугольной областью.

Таблица 7.1.4

95 %-е границы доверительных интервалов
переходных вероятностей состояния

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	(0,16, 0,42)	(0,21, 0,48)	(0,12, 0,36)	(0,06, 0,27)					(0,01, 0,12)	(0,02, 0,18)
1		(0,23, 0,63)	(0,16, 0,53)	(0,07, 0,39)	(0,01, 0,22)				(0,01, 0,22)	(0,02, 0,28)
2			(0,11, 0,48)	(0,14, 0,52)	(0,11, 0,48)	(0,05, 0,37)			(0,03, 0,31)	(0,01, 0,25)
3				(0,13, 0,54)	(0,28, 0,72)	(0,01, 0,26)	(0,05, 0,39)		(0,01, 0,26)	(0,01, 0,26)
4					(0,11, 0,50)	(0,22, 0,65)	(0,05, 0,38)	(0,03, 0,33)	(0,01, 0,26)	(0,02, 0,33)
5						(0,17, 0,62)	(0,17, 0,62)	(0,06, 0,44)	(0,01, 0,30)	(0,03, 0,37)
6							(0,20, 0,67)	(0,12, 0,56)	(0,01, 0,29)	(0,16, 0,62)
7								(0,16, 0,65)	(0,28, 0,79)	(0,08, 0,51)

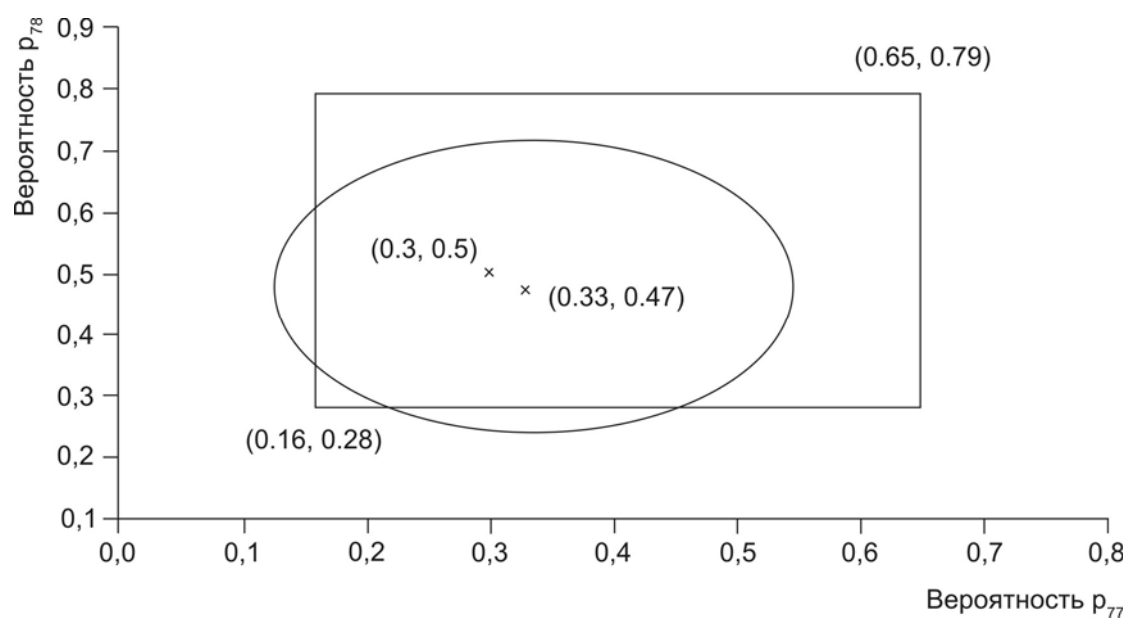


Рис. 7.1.3. 95 %-й доверительный эллипс
и приближенная прямоугольная область

7.1.3. Оптимальный предельный уровень для процесса деградации вкладыша

На следующем этапе вычисленные характеристики процесса деградации (в данном случае построенные с применением марковской матрицы) используются для определения оптимальной политики управления в соответствии с задаваемым функционалом качества.

Следует заметить, что при формировании марковской матрицы по имеющимся реализациям процесса было сделано (неявно) фундаментальное предположение о том, что все реализации принадлежат одной генеральной совокупности. Это предположение можно оправдать, вообще говоря, лишь с прагматической точки зрения, поскольку проследить за процессом изготовления вкладышей и их жизнью от начала до конца нет никакой возможности. Приведенные же выше статистические правила проверки гипотез могут лишь в какой-то мере подтвердить это предположение.

Поставим задачу в следующем виде.

Пусть необходимо найти такое состояние m , $0 < m < n$, при превышении которого следует произвести замену. Поиск данного состояния следует осуществлять, исходя из соответствующей оптимизационной задачи с заданным функционалом качества.

1. Функционал качества

В данном случае в процессе эксплуатации шпинделя происходит неоднократная замена его элементов (вкладышей). Как это было отмечено в гл. 2, при такой эксплуатации, если применяется критерий стоимости интенсивности затрат на эксплуатацию, то следует использовать отношение математических ожиданий затрат к длительности цикла эксплуатации (регенерации) (см. гл. 3) с целью его минимизации.

Математическое отношение интенсивности затрат в этом случае записывается как

$$s(m) = \frac{EX(m)}{E\theta(m)}, \quad (7.1.6)$$

где $EX(m)$, $E\theta(m)$ – математические ожидания затрат и длительности цикла регенерации, соответственно.

Для придания $s(m)$ определенности пусть затраты на одном цикле регенерации представляются в простейшем виде как в (2.1.5): $X = c + dI\{\text{отказ}\}$, где I – индикаторная функция.

Соединим процесс деградации последовательно, реализация за реализацией; тем самым получим новый процесс $\hat{Z}(t)$ изменения качества, являющийся регенерирующим с циклом θ . Известно, что при данной постановке задачи оптимальной стратегией является восстановление, производимое только по достижению множества $V = \{m, \dots, n\}$. Возможные реализации так построенного процесса приведены на рис. 7.1.4, причем следует различать состояния: m – состояние предупреждающего допуска, $(n - 1)$ – состояние отказа при превентивной замене и n – состояние, при котором происходит отказ оборудования.

Уравнение (7.1.6) превращается в

$$s(m) = \frac{c + dP_f(m)}{E\theta(m)}, \quad (7.1.7)$$

где P_f – вероятность отказа на одном цикле регенерации.

Математические ожидания в (7.1.7) зависят от уровня предупреждающего допуска m . Чем меньше m , тем меньше значения P_f и $E\theta$, и наоборот. Это означает, что нет возможности на основе инспекций определить оптимальный уровень m^* и требуется процедура оптимизации.

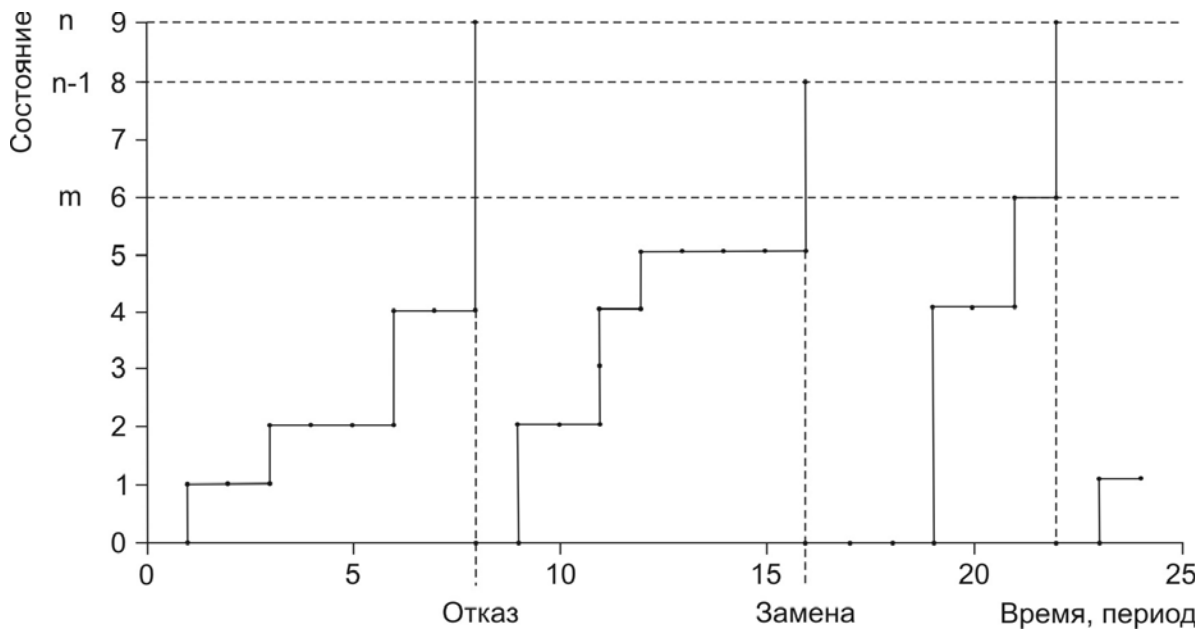


Рис. 7.1.4. Схема управления процессом по предельному уровню

Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти такое значение m^* , чтобы функционал (7.1.7) имел минимум, если процесс деградации определяется марковской цепью, заданной матрицами переходных вероятностей.

стей \hat{P} или P^0 . Вычисления (7.1.7) могут быть в данном случае сделаны для каждого значения m и затем минимизированы по этой переменной.

2. Марковские уравнения

Решение проблемы сводится к вычислению математического ожидания длительности цикла $E\theta$ и вероятности отказа P_f как величин, зависящих от параметра m .

Чтобы определить $E\theta$, воспользуемся уравнением

$$E\theta = \sum_{i=0}^{m-1} T_{i,V} P_i, \quad (7.1.8)$$

которое основывается на теореме полной вероятности, где $P_i = P\{\hat{Z}(0) = i\}$ – распределение вероятностей начальных состояний вкладыша в момент помещения его в эксплуатацию, $T_{i,V}$ – математические ожидания времен переходов из состояния i в множество V .

Для вычисления $T_{i,V}$ могут быть составлены алгебраические уравнения, основанные на прямом уравнении баланса [83]:

$$T_{i,V} = \sum_{j=0}^{m-1} p_{ij} T_{j,V} = 1, \quad i = 0, \dots, m-1. \quad (7.1.9)$$

Чтобы найти P_f для регенерирующего цикла длительности θ , определим сначала время $l_{i,V}$ до первого попадания процесса в множество V : $l_{i,V} = \min\{t, \hat{Z}(t) \in V \mid \hat{Z}(0) = i\}$, $i = 0, \dots, m-1$; и вероятность того, что достигнуто состояние большее или равное m из состояния i до того, как замена была произведена: $f_{ik} = P\{\hat{Z}(l_{i,V}) = k \mid \hat{Z}(0) = i\}$, $i = 0, \dots, m-1$, $k = m, \dots, n$. Для этих вероятностей f_{ik} , $k = m, \dots, n$, также может быть составлена система линейных алгебраических уравнений:

$$f_{ik} = p_{ik} + \sum_{j=0}^{m-1} p_{ij} f_{jk}, \quad i = 0, \dots, m-1. \quad (7.1.10)$$

Из уравнений (7.1.10) находится также вероятность оказаться сразу в состоянии отказа n при первом попадании в множество остановки V . Для получения вероятности отказа P_f используется формула полных вероятностей.

Поскольку в настоящем случае ставятся в эксплуатацию неповрежденные вкладыши, то начальное распределение можно взять $P_0 = 1$, и тогда $P_f = f_{0n}$, а $E\theta = T_{0,V}$.

3. Обсуждение результатов вычислений

Итак, получены все необходимые уравнения (7.1.8–7.1.10) для вычисления математического ожидания интенсивности затрат на одном цикле регенерации (7.1.7). Используя матрицы \hat{P} и P^0 , получаем значения вероятностей и времен переходов; результаты вычислений представлены в табл. 7.1.5. Из этой таблицы видно, что для предупреждающего уровня 8, который можно интерпретировать как то, что никакого управления производить не надо, вероятность отказа с матрицей \hat{P} равна 0,57, что в точности совпадает с наблюдаемой частотой отказов при настоящем производстве.

На рис. 7.1.5 показаны значения функции $s(m)$ для каждой пары чисел c и d . Обозначение данных на этом рисунке произведено в условных единицах, чтобы разместить кривые на одном графике. Значения $P_f(m)$ и $E\theta(m)$ приведены в табл. 7.1.5.

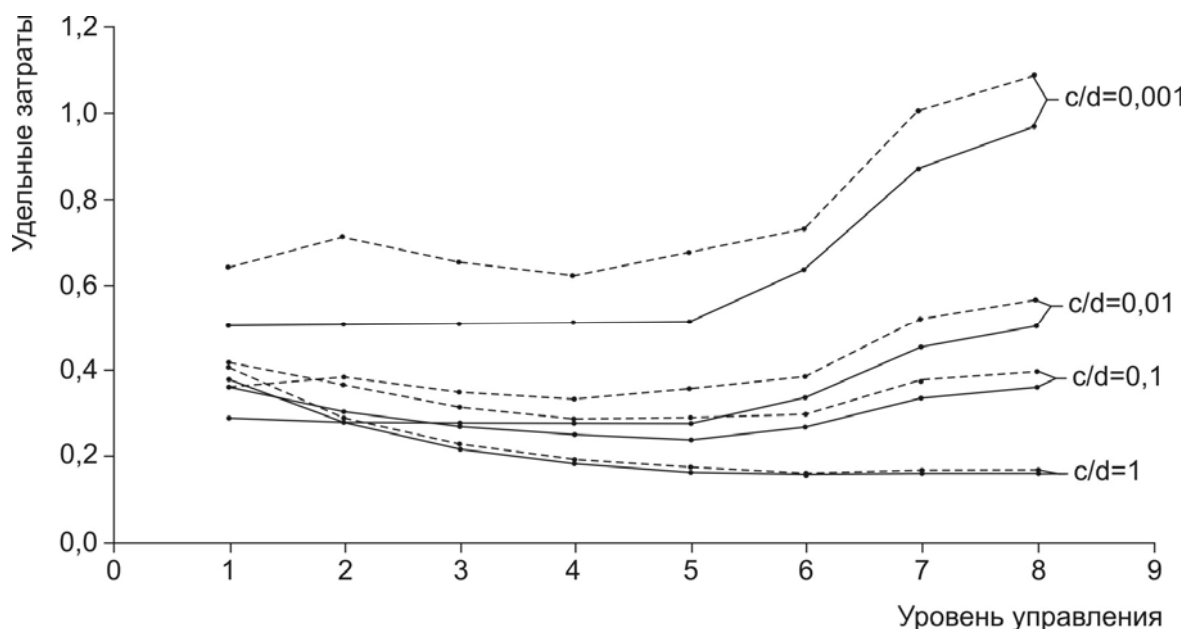


Рис. 7.1.5. Зависимость затрат от предельного уровня управления:

————— — матрица P^0 , — — — — — матрица \hat{P}

Таблица 7.1.5

Зависимость матриц P^0 и \hat{P} от предельного уровня m

Мат- рица	m	1	2	3	4	5	6	7	8
P^0	$P_f(m)$	0,071	0,102	0,135	0,168	0,197	0,276	0,421	0,509
	$E\theta(m)$	1,42	2,04	2,71	3,37	3,94	4,47	4,95	5,39
\hat{P}	$P_f(m)$	0,085	0,142	0,171	0,200	0,257	0,314	0,486	0,571
	$E\theta(m)$	1,34	2,03	2,66	3,28	3,88	4,40	4,94	5,37

Анализируя «поведение» кривых на рис. 7.1.5, можно выделить два граничных случая.

1) Когда цена отказа d мала, то поведение $s(m)$ близко к поведению функции $1/m$ и нет необходимости в проведении превентивных замен. При увеличении этой цены функция начинает в конце возрастать и появляются видимые впадины.

2) Когда цена отказа d достаточно велика, то и $c/d \rightarrow 0$. Значит, поведение $s(m)$ начинает определяться поведением $P_f/E\theta$. Также из рис. 7.1.5 видно, что из-за специфичности матрицы P^0 это отношение является константой для $m = 1, \dots, 5$. В случае вычислений с матрицей \hat{P} поведение функции имеет более нерегулярный характер.

Отметим также, что $s(m)$ находится между функциями $1/E\theta(m)$ и $P_f/E\theta(m)$. Оптимальное значение предельного уровня m^* меняется от 3 до 8 при различных ценах, а не от 1, как это могло показаться до начала исследований. Последнее объясняется специфичностью поведения процесса деградации, моделируемого полученной марковской цепью.

7.1.4. Оптимальный предельный уровень для процесса деградации рамных пил

При механической обработке древесины методом пиления наибольшее распространение получили ленточные, рамные и круглые пилы. Практика использования пил различного типа показывает наибольший расход рамных пил: при расчетах потребности их расходный фонд увеличивается в 1,5 раза. Причиной этому является появление в них зародышей усталостных трещин, развитие трещин и окончательное разрушение.

Для контроля в условиях Тавдинского лесокombината эксплуатационных свойств рамных пил на лесопильных рамах РД 75/6/7 с помощью акустоэмиссионного (АЭ) метода в Уральской государственной лесотехнической академии был разработан и внедрен экспериментальный стенд [49]. Сущность метода, реализованного на этом стенде, заключается в измерении волн напряжений, возникающих при локальной динамической перестройке структуры материала под воздействием внешнего нагружения. Для получения достаточной информации о закономерностях деформирования и развития процесса деградации были выбраны следующие параметры сигнала акустической эмиссии: скорость счета Z' , суммарное число им-

пульсов Z , амплитуда сигнала, отражающие энергетику и кинетические особенности зарождения и развития дефектов, которые в конечном итоге приводят к потере изделием работоспособности.

1. Аппаратная реализация метода

Как правило, регистрируются два типа сигналов. К первому относится взрывная эмиссия, наблюдаемая, например, при образовании микротрещин, их продвижении и ветвлении, ко второму типу – непрерывная акустическая эмиссия, характерная для пластической деформации металлов. Измерить акустоэмиссионные параметры в процессе пиления практически невозможно. Поэтому акустическая эмиссия регистрируется при нагружении пилы на разработанном стенде периодически, между сменами, что позволяет проследить динамику развития дефектов, оценить степень их опасности и произвести выбраковку пил.

Регистрация сигналов осуществляется с помощью специально разработанного малогабаритного прибора, автоматически регистрирующего параметры Z' и Z . Прибор обеспечивает регистрацию слабых сигналов на фоне шумов, обладает необходимым быстродействием и имеет малые собственные шумы. Рабочая полоса прибора 150–200 кГц с полосой пропускания 0,7 кГц. Максимальный коэффициент усиления – 5000.

Нагружение пил производится по заданной программе (нагрузка на пилу до 5 т). В процессе нагружения осуществляются измерение и аналоговая запись необходимых параметров.

В процессе отладки и статистических испытаний рамных пил с помощью этого комплекса выяснилось, что наибольшей информативностью для выводов о степени изменения прочностных свойств материала пил обладает параметр Z – сумма импульсов.

В результате предварительных экспериментальных исследований и после разработки приборов и методов управления процессами деградации было предложено осуществить оптимальную эксплуатацию рамных пил по сигналу акустоэмиссии, ассоциированному с реально протекающими зарождением и ростом трещин в материале пил.

Всего было получено 25 реализаций сигнала, т. е. испытано и доведено до разрушения в процессе эксплуатации 25 полотен пил. На рис. 7.1.6 показаны некоторые выборочные реализации ассоциированного процесса деградации. Видно, что начальные значения процесса имеют весьма существенный разброс (в отличие от параметров износа вкладыша). После начала эксплуа-

тации сигнал имеет тенденцию к росту, а затем ко времени первой перенарубки (нарубание новых зубьев на пилу и их заточка; обозначены на рис. 7.1.6 символом «⊗») опускается до некоторого случайного значения. Этот факт можно объяснить тем, что в начале эксплуатации пилы происходит ее упрочнение и основной вклад в интенсивность сигнала АЭ дает пластическая деформация материала. После охрупчивания материала наступает стадия относительной устойчивости значений сигнала. Затем в результате накопления усталостных повреждений, появления и роста усталостных трещин сигнал АЭ начинает увеличиваться. В процессе испытаний и из опыта эксплуатации было выяснено, что до первой перенарубки поломка пил случается довольно редко и аварийный выход составляет не более 1–2 %. Поэтому было предложено производить измерение сигнала АЭ до постановки пил в эксплуатацию с целью их выбраковки и начинать последовательные измерения сигнала лишь после первой перенарубки. При начальной выбраковке пил из 25 единиц, использованных для статистического эксперимента, не было ни одного отказа до первой перенарубки.

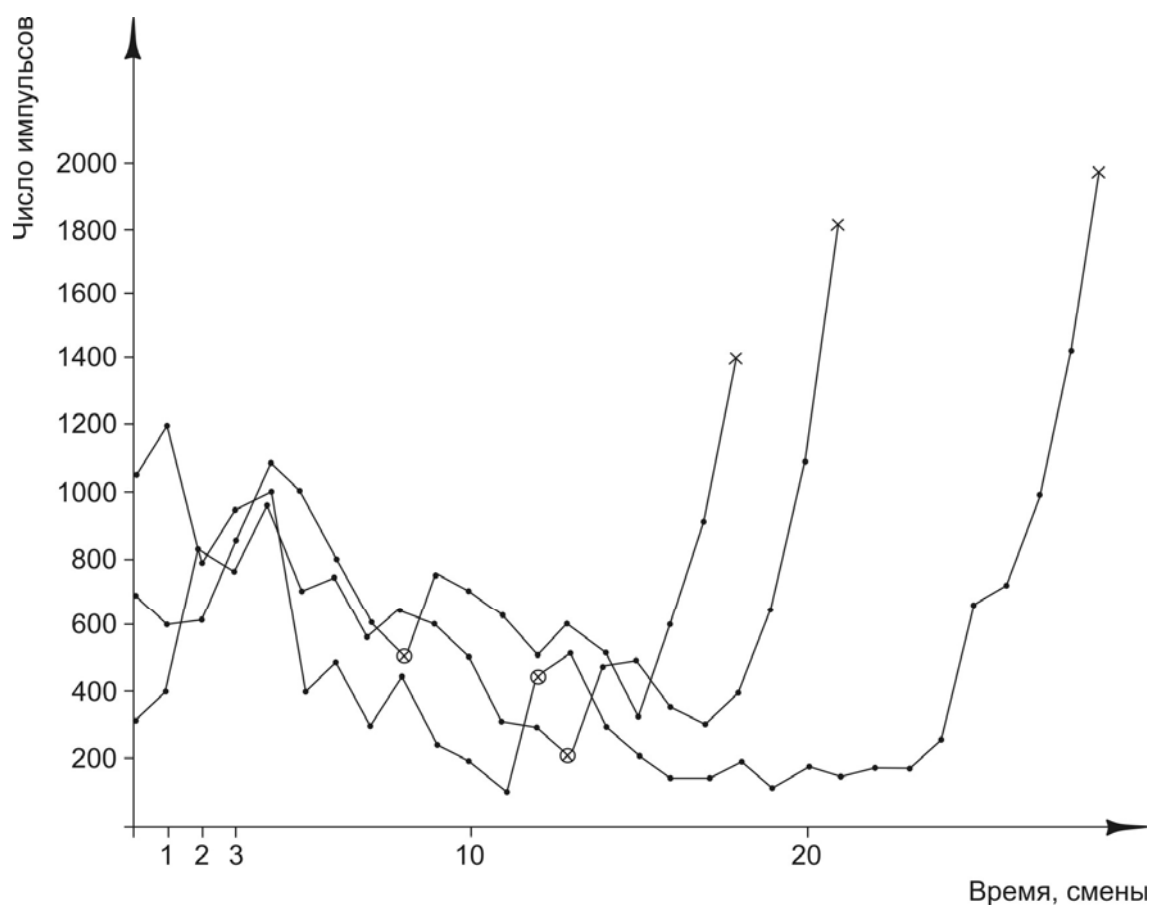


Рис. 7.1.6. Изменение сигнала АЭ в процессе испытаний

2. Построение марковской цепи

Для того чтобы промоделировать изменение параметра АЭ, также была выбрана марковская цепь с дискретным временем и дискретным пространством состояний. Количество состояний n было определено равным 10 и 11 – поглощающее состояние, соответствующее отказу пил. Максимальная наработка на отказ – 25 смен. Использование подобных статистических методов показало, что так преобразованный процесс является однородной по времени цепью Маркова первого порядка, имеющей случайный разброс начального состояния. Переходные вероятности цепи представлены в табл. 7.1.6.

Таблица 7.1.6

Переходные вероятности марковской цепи

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,64	0,29	0,06	0,10							
2	0,19	0,50	0,25	0,04	0,01						
3	0,01	0,20	0,49	0,19	0,09	0,01					
4		0,05	0,08	0,37	0,34	0,10	0,03	0,03			
5			0,03	0,06	0,28	0,41	0,19	0,03			
6					0,10	0,10	0,30	0,30	0,15	0,05	
7							0,07	0,29	0,36	0,14	0,14
8								0,08	0,54	0,23	0,15
9									0,17	0,28	0,56
10											1,00
11											1,00

3. Оптимальный предельный уровень для сигнала АЭ

В фактических условиях лесопильного производства не имеет смысла производить индивидуальное отслеживание состояния каждой пилы (это просто невозможно). Более разумно установить для оператора диагностической установки некоторое предельное значение сигнала АЭ для всей совокупности эксплуатируемых рамных пил. Для этого следует принять предположение о том, что они все принадлежат одной генеральной совокупности, построить, как и ранее, регенерирующий процесс и найти оптимальное значение предельно допустимого уровня сигнала m^* , исходя из функционала качества (7.1.7). Все действия по отысканию значения m^* аналогичны произведенным для вкладыша. Отличие состоит только в том, что начальное распределение состояний не равно 1, но для уравнений (7.1.8–7.1.10)

это не является помехой. Результаты моделирования приведены на рис. 7.1.7 в некоторых условных единицах. Значения $P_f(m)$ и $E\theta(m)$ представлены в табл. 7.1.7.

Таблица 7.1.7

Значения вероятностей и среднего времени ожидания в зависимости от m

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_f(m)$	0	0	0	0	0	0	0,08	0,16	0,56	1,00
$E\theta(m)$	11,0	13,8	18,4	21,0	22,7	23,7	24,3	24,8	25,5	26,0

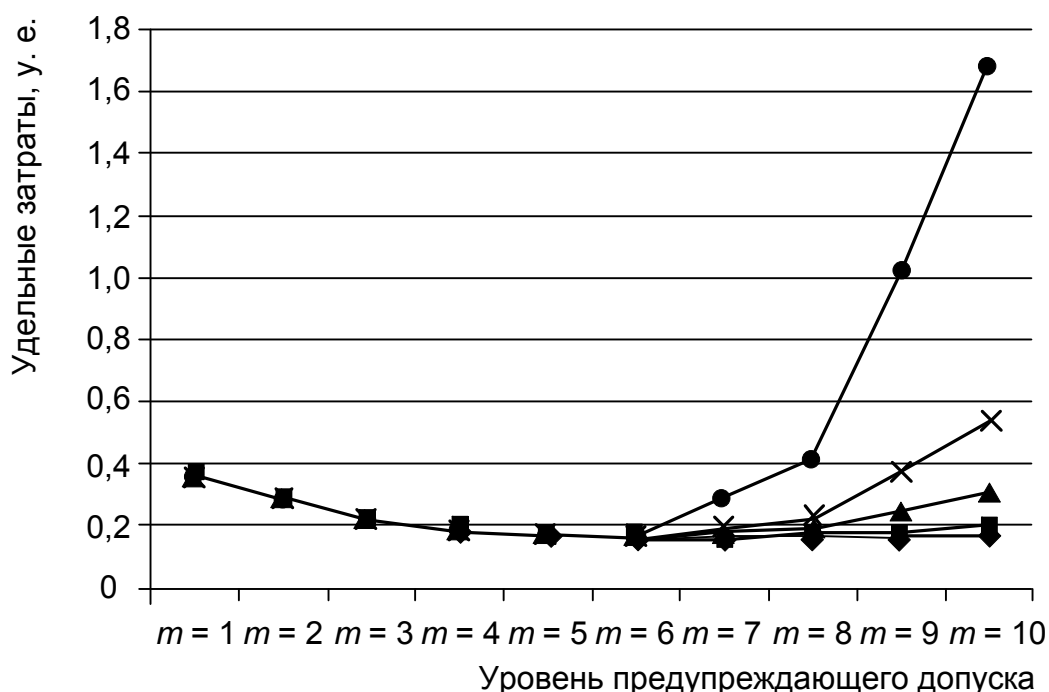


Рис. 7.1.7. Зависимость удельных затрат от предельного уровня предупреждающего допуска:

—◆— $c/d = 10$; —■— $c/d = 4$; —▲— $c/d = 1$; —×— $c/d = 0,4$; —●— $c/d = 0,01$

Из рис. 7.1.7 видно, что оптимальный уровень предупреждающего допуска, когда необходимо осуществлять управляющее воздействие, находится в диапазоне от 6 до 7 единиц.

Марковская модель деградации была успешно применена при моделировании двух типов процессов деградации: износа вкладыша шпинделя и ассоциированного процесса, измеряемого по сигналу акустоэмиссии, роста усталостных трещин рамных пил. Статистические оценки различных

параметров процессов деградации были получены с помощью методов максимального правдоподобия и других статистических критериев с уровнем значимости 0,05. Оптимальная политика управления по предельно допустимому уровню вполне применима, однако необходимо проявлять осторожность и рассматривать не только оптимальные значения функционала качества, но и ближайшие, поскольку возможно нестабильное поведение функции $s(m)$ из-за свойств марковских матриц. Так, если в первом примере процесс был монотонным, исходя из постановки самой задачи, то во втором марковская цепь не являлась монотонной. Однако это обстоятельство не может помешать решению оптимизационных задач.

7.2. Прогнозирование ресурса элементов металлоконструкции козлового крана

С целью демонстрации эффективности метода прогнозирования функций распределения ресурса элементов МС с помощью оценки накапливаемых повреждений на основе индивидуальных кривых усталости, изученных в предыдущих главах, далее в работе рассматриваются функционирование крана типа ЛТ-62Б и накопление усталостных повреждений в его металлоконструкции. На предприятиях лесной отрасли работает более 1000 кранов этого типа грузоподъемностью 32 тонны, специально предназначенных для работы с хлыстами и деревьями.

Данная часть работы базируется на результатах диссертации В. Г. Васильева [13], посвященной обоснованию скоростных параметров козловых кранов для работы с хлыстами. В. Г. Васильевым исследованы колебания интенсивности вывозки леса, процессы взаимодействия механизмов технологической среды нижнего склада, а также важные прочностные характеристики крана ЛТ-62Б. Результаты этого исследования положены в основу излагаемого ниже решения задачи прогнозирования ресурса металлоконструкций козловых кранов.

7.2.1. Анализ работы крана ЛТ-62Б с хлыстами на нижних складах

Кран обслуживает две раскрывочные установки ЛО-15С, расположенные в пролете крана, создает запас хлыстов и разгружает прибывающие на нижний склад автопоезда. Автодорога проходит вдоль запаса хлыстов в пролете

крана. Раскряжевочные установки расположены с одной стороны относительно запаса таким образом, что приемные площадки находятся в пролете крана.

Наблюдение за работой кранов на предприятиях Свердловской области позволяет сделать ряд допущений:

- если среднемесячная вывозка превышает переработку, т. е. идет процесс создания запаса хлыстов, кран ожидает работы, находясь над центром формируемого штабеля, с опущенным на штабель грейфером;
- в случае превышения переработки над вывозкой за месяц, кран ожидает работы над операционным штабелем вблизи раскряжевочной линии, грейфер опущен на штабель;
- величина запаса хлыстов изменяется за счет увеличения или уменьшения длины штабеля, высота его при этом считается максимальной;
- увеличение штабеля хлыстов ведется с противоположной от раскряжевочных площадок стороны;
- общее количество перерабатываемого груза K_g в среднем в 1,4 раза больше, чем общий объем вывозки, за счет дополнительных перевалочных операций.

Известно, что **интенсивность вывозки** в течение года неодинакова и не может рассматриваться как стационарный процесс. По результатам изучения характера нестационарного потока автопоездов за год на 23 предприятиях «Свердлеспрома» в течение пяти лет выяснилось, что месячная интенсивность вывозки даже для одного предприятия существенно изменяется из года в год. Это объясняется тем, что на вывозку воздействует целый комплекс различных систематических и случайных факторов: погодные условия, состояние дорог, состояние автомобильного парка и др. Однако вся привезенная на нижний склад древесина должна быть переработана в течение года. Поэтому, чем меньше возможностей вывезти лес в весенне-осенний период, тем интенсивнее необходимо осуществлять вывозку зимой. Причем, если зимой интенсивность вывозки значительно превышает уровень переработки, то летом в большинстве случаев перерабатывается хлыстов больше, чем вывозится.

Из анализа 118 реализаций значений вывозок, зафиксированных за год, можно вывести значения относительной интенсивности вывозки $q(t)$ в процентах к годовому грузообороту для предприятий «Свердлеспрома».

Будем считать данные о вывозке, приведенные в табл. 7.2.1, ожидаемыми значениями для любого крана ЛТ-62Б, который может быть под-

вергнут оцениванию ресурса и накапливаемому повреждению за год эксплуатации, и, в частности, для конкретного крана, подвергнутого тензометрированию. Конечно, можно было бы воспользоваться для каждого крана своими собственными значениями грузооборота в месяц, но установить эти данные без специальных статистических исследований весьма затруднительно. К тому же для решения задачи прогнозирования ресурса требуется предсказание будущего нагружения, которое естественно взять в виде ожидаемых значений по некоторому ансамблю эксплуатируемых кранов при сходных режимах эксплуатации.

Таблица 7.2.1

Интенсивность вывозки, %

Месяц	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й
$q(t)$	0,25	0,24	0,32	-0,08	-0,17	-0,14
Месяц	7-й	8-й	9-й	10-й	11-й	12-й
$q(t)$	-0,13	-0,12	-0,15	-0,15	-0,02	0,15

Распределение по месяцам величины вывозки $Q(t)$, выраженное через значение относительной интенсивности $q(t)$, имеет вид

$$Q(t) = Q(Aq(t) + 8,33)/100 \text{ [м}^3\text{]}, \quad (7.2.1)$$

где Q – годовой грузооборот нижнего склада;

A – максимальный расчетный запас хлыстов на нижнем складе (в % к Q).

Подставляя требуемые значения величин в (7.2.1), которые для обследуемого крана равны 400 тыс. м³ в год и $A = 10$ %, получим соответственно с учетом K_g объемы груза, перерабатываемого краном по месяцам (табл. 7.2.2), при общем объеме в 560 тыс. м³ за год.

Таблица 7.2.2

Объем переработки груза, тыс. м³

Месяц	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й	11-й	12-й
$Q(t)$	60,6	60,1	64,2	42,2	37,1	38,8	39,4	39,9	38,2	38,2	44,5	55,0

Циклом работы крана можно считать совокупность операций захвата груза, его подъема, перемещения, опускания и освобождения от груза.

В результате проведенных исследований было установлено, что время обработки пакетов хлыстов (длительность цикла работы) может быть смоделировано нормальной случайной величиной с математическим ожиданием 11,5 мин и среднеквадратичным отклонением 1,5 мин.

К сожалению, эту характеристику работы крана затруднительно использовать для определения числа циклов нагружения крана за какой-либо период работы, поскольку процесс обработки грузов проходит крайне нерегулярно и, ориентируясь на общее время работы крана и оценку длительности циклов нагружения, можно сделать большую ошибку в сторону увеличения их числа по сравнению с действительным. Поэтому предлагается поступить следующим образом.

Известно, что объем единичного перерабатываемого груза можно моделировать случайной величиной ζ с некоторым распределением $F(t)$, имеющим математическое ожидание $m_\zeta = 22 \text{ м}^3$ и стандартное отклонение $\sigma_\zeta = 3 \text{ м}^3$, при номинальном объеме одной пачки в 25 м^3 [13]. Тогда, зная общий объем перерабатываемого груза за месяц и за год, можно определить характеристики распределения числа циклов (блоков) нагружения за эти периоды, если воспользоваться методами теории восстановления [38].

Согласно этим выкладкам рассмотрим следующий случайный процесс восстановления (рис. 7.2.1), где ζ_1 – случайные объемы грузов образуют поток восстановления: $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \dots$

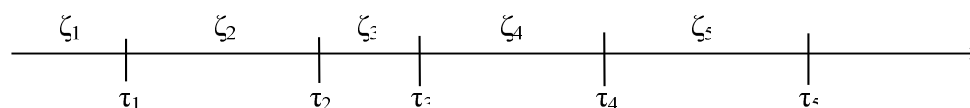


Рис. 7.2.1. Случайный процесс восстановления

В теории восстановления под реализациями случайной величины τ , имеющей распределение $F(t)$, понимаются моменты восстановления отказавших изделий. Здесь же – величина переработанного груза τ_n после n -й перегрузочной операции.

Введем следующее обозначение: $F_n(t) = P\{\tau_n < t\}$. Функции $F_n(t)$ определяются рекуррентно,

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-x) dF(x), \quad F_1(t) = F(t) = P\{\tau < t\}.$$

Пусть $v(t)$ – число циклов работы крана, условно говоря, за величину перегружаемого груза t . Нетрудно увидеть, что

$$P\{v(t) \geq n\} = P\{\tau_n < t\} = F_n = F_n(t).$$

Отсюда

$$P\{v(t) = n\} = F_n(t) - F_{n+1}(t).$$

Величина $v(t)$ определяет число циклов работы крана при перевалке груза общим объемом t .

Введем еще одно обозначение: $H(t) = Ev(t)$ – среднее число блоков нагружения за перевалку объемом t . Функция $H(t)$ называется функцией восстановления и находится как

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).$$

Элементарная предельная теорема восстановления говорит о том, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t)/t = 1/m_{\zeta},$$

где m_{ζ} – среднее значение объема груза.

В действительности общий объем перерабатываемого груза t существенно больше, чем единичное нагружение, поэтому следует воспользоваться асимптотическими свойствами рассматриваемого процесса восстановления.

Из соответствующей теоремы следует, что при больших значениях t справедливо приближенное равенство $H(t) \approx t/m_{\zeta}$, относительная погрешность которого с ростом t стремится к нулю. Согласно еще одной теореме [38], приближение можно осуществить по формуле

$$H(t) \approx \frac{t}{m_{\zeta}} + \frac{\sigma_{\zeta}^2 - m_{\zeta}^2}{2\sigma_{\zeta}^2}.$$

И, наконец, в еще одной теореме утверждается, что вне зависимости от вида распределения величины единичного груза (ограничение накладывается лишь на нерешетчатость распределения) при большом объеме t случайное число блоков нагружения v , затрачиваемое на перевалку этого объема, имеет асимптотически нормальное распределение со средним и дисперсией

$$Ev \approx t/m_{\zeta}, Dv \approx \sigma_{\zeta}^2 t/m_{\zeta}^3. \quad (7.2.2)$$

В результате вычислений по этим формулам получаем нормальное распределение числа блоков нагружения с параметрами m_0 и σ_0 для каждого усредненного месяца работы, определяемого по табл. 7.2.2, которые представлены в табл. 7.2.3.

Таблица 7.2.3

Число блоков нагружения

Месяц	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й
Среднее	1378	1366	1467	958	844	882
Стандарт	46	45	49	32	28	29
Месяц	7-й	8-й	9-й	10-й	11-й	12-й
Среднее	895	907	869	869	1035	1251
Стандарт	30	30	29	29	34	41

Значения этих параметров за год работы составят, соответственно, 12719 и 420 циклов работы. На рис. 7.2.2 изображены средние значения числа блоков нагружения и 95 %-е доверительные интервалы.

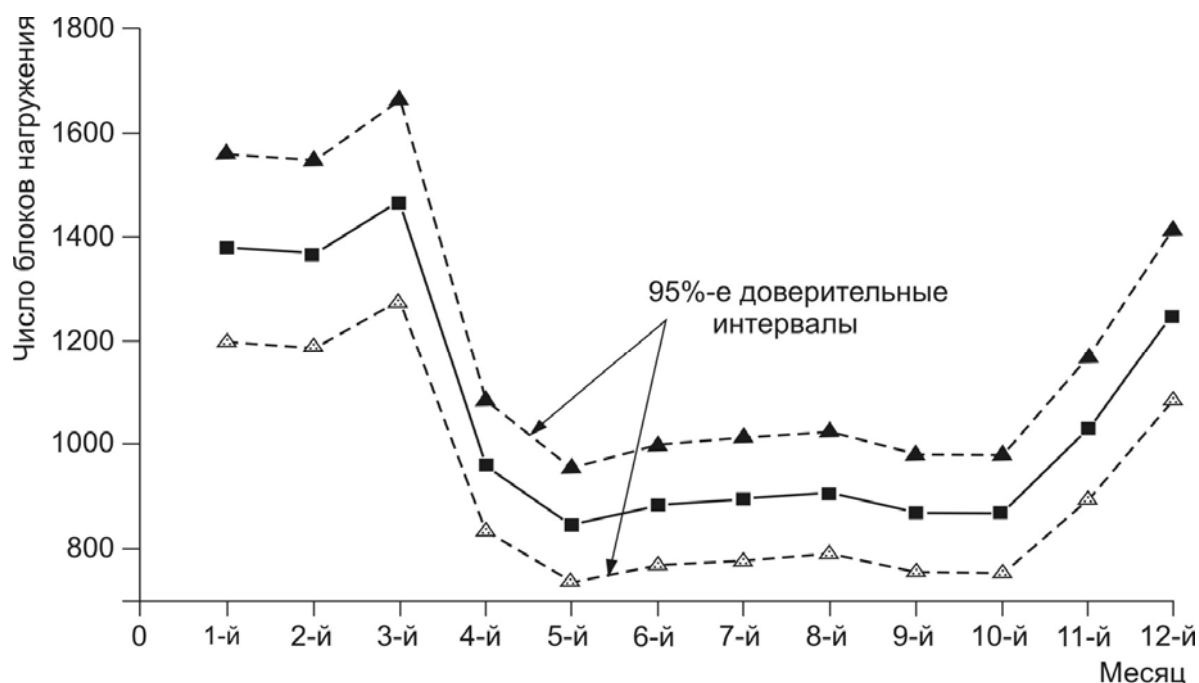


Рис. 7.2.2. Число блоков нагружения в месяц и 95 %-е доверительные интервалы

7.2.2. Результаты натурного тензометрирования

Предварительно были проведены статические тензометрические исследования крана с тем, чтобы выявить наиболее нагруженные элементы и определить диапазон действующих напряжений. Вертикальные нагрузки создавались путем поднятия мерного груза; перекосные нагрузки создавались лебедкой трактора ТТ-4 через динамометр. Схема размещения датчиков приведена на рис. 7.2.3. Подробно результаты этих исследований изложены в работе В. Г. Васильева [13], поэтому приведем здесь только краткие выводы. Как и следовало ожидать, наибольшее напряжение растяжения в мосту возникает в нижнем поясе фермы (датчик № 11): $S = 45$ МПа. Наибольшее сжимающее напряжение испытывает верхний пояс вертикальных ферм, причем к напряжениям, изгибающим мост, добавляются напряжения от местного изгиба, вызванные давлением колеса грузовой тележки. В результате нижний пояс двутавра меньше сжат, чем верхний: 75 МПа (датчик № 17) и 20 МПа (датчик № 10). Остальные элементы моста нагружены значительно слабее, напряжения не превышают абсолютных значений – 45 МПа.

Элементы, соединяющие опору с мостом крана, нагружены также неравномерно. Наибольшее сжимающее напряжение испытывают несущие уголки внутренней панели – здесь максимальное напряжение достигает 60 МПа (датчики № 8, 9). Наибольшее растягивающее напряжение возникает в диафрагмах и уголках внешней панели и достигает 45 МПа (датчики № 1, 6).

Элементы моста крана, в основном, работают на восприятие вертикальных нагрузок, вызывающих максимальные напряжения, на перекосные нагрузки мост крана реагирует слабо. Опора крана, наоборот, воспринимает, в основном, перекосные нагрузки.

Нагруженность металлоконструкции козлового крана, перегружающего хлысты, несколько отличается от нагрузок козлового крана общего назначения. Это, во-первых, связано с определенной податливостью груза (пакета хлыстов), его длиной, что приводит к последовательному отрыву от опоры частей пакета. В результате нагрузка от веса груза при подъеме возрастает относительно медленно и плавно. Второй особенностью процесса нагружения при подъеме является весьма низкая вероятность осуществления подъема с подхватом. Это обусловлено наличием грейферного

захвата, при работе с которым, чтобы не допустить спадывания тросов с блоков траверсы, к которой крепится грейфер, необходимо постоянно держать груз на весу. При этом возможность возникновения зазора, достаточного для разгона электропривода до номинальных оборотов при его выборе, крайне незначительна.

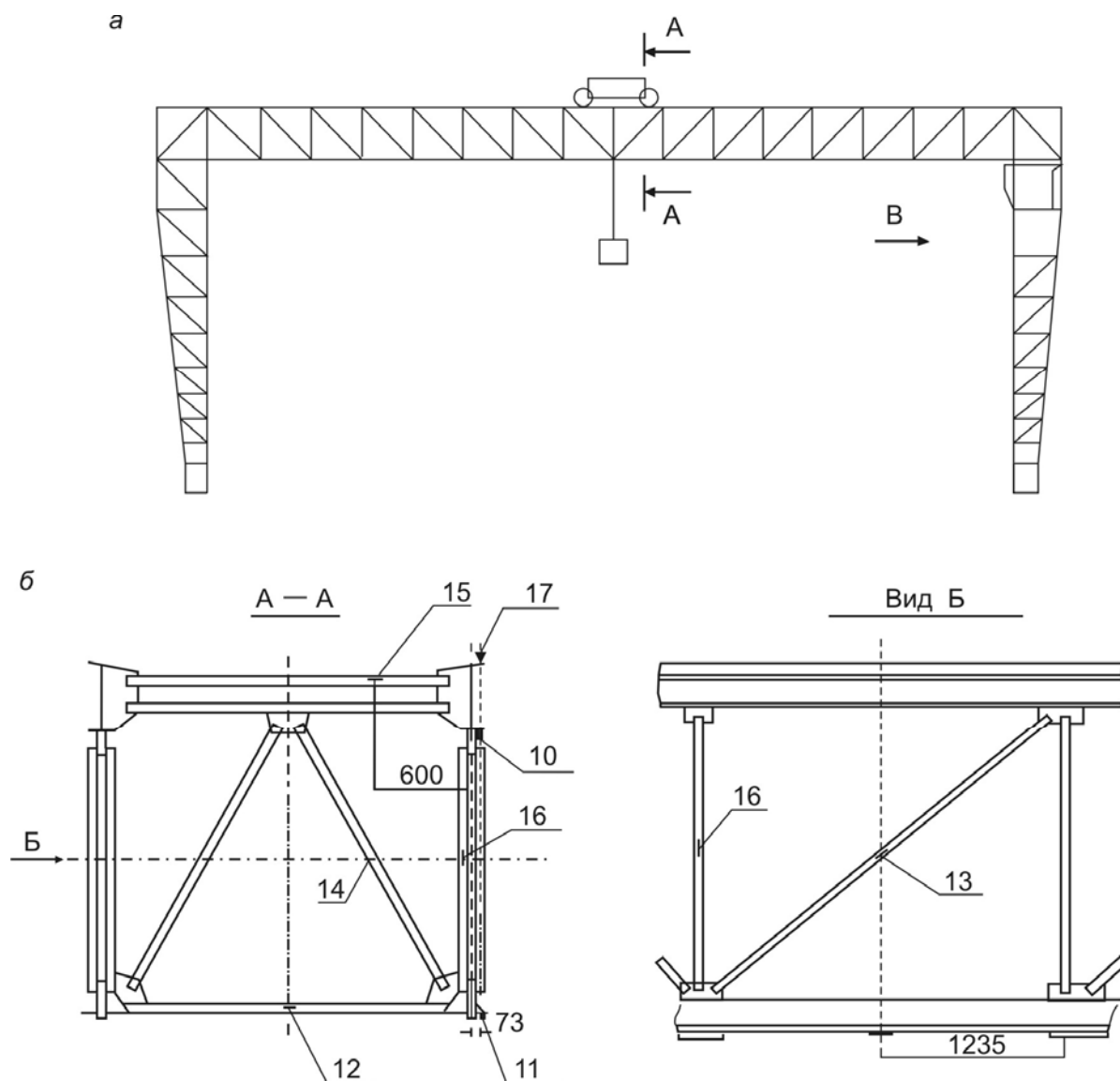


Рис. 7.2.3. Размещение датчиков (окончание см. на с. 208):

а – общий вид; *б* – в пролете крана; *в* – на опоре крана;

1–16 – места размещения датчиков

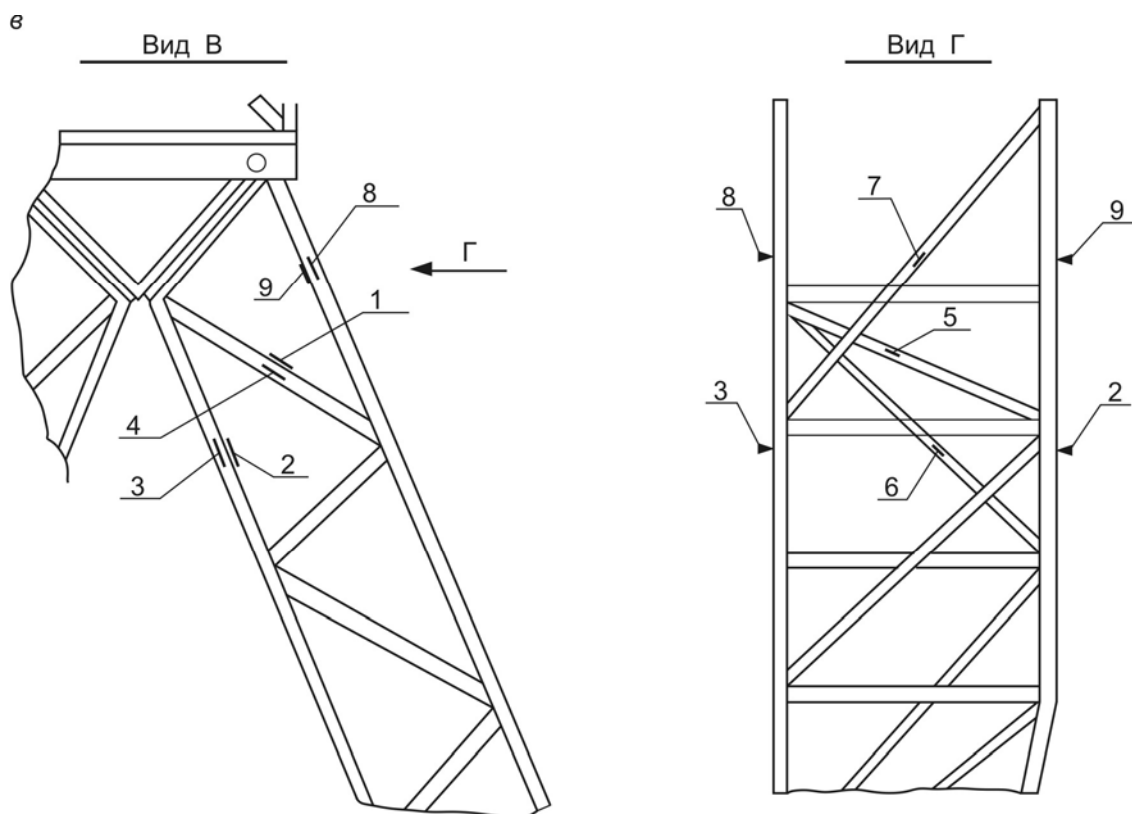


Рис. 7.2.3. Окончание (начало см. на с. 207)

Таким образом, козловые краны рассматриваемого типа испытывают меньшие динамические напряжения, чем аналогичные краны (с той же скоростью подъема) общего назначения. При плавном разгоне, наиболее близком к обычному, отрыв груза от опоры происходит через 3,5–4,5 с после включения электропривода. При этом заметных колебаний металлоконструкции не происходит, напряжения плавно достигают максимальных значений. При быстром разгоне и максимально возможном зазоре в соединении траверсы с грейфером натяжение троса осуществляется через 1 с после включения электродвигателей. За это время происходит выбор зазора в соединении. Разгон электродвигателя до оборотов, близких к номинальным, осуществляется за 0,6–0,7 с. Весь процесс отрыва груза от опоры, от момента включения электродвигателей до нагрузки в тросах, соответствующей весу груза, занимает 3,0–3,5 с. Нагрузка в тросах изменяется плавно до максимума. Напряжения в металлоконструкции моста и опоры нарастают до максимальных значений за 1,0–2,0 с и колеблются около средних значений в пределах 3,5 % (рис. 7.2.3, в).

При подъеме жесткого груза с подхватом скорости нарастания нагрузок в тросовой подвеске и металлоконструкции крана практически те же, что и при быстром подъеме пакета хлыстов.

Колебания металлоконструкции крана обусловлены суммированием, грубо говоря, двух гармонических процессов с периодами 0,6 и 2,0 с, полученных из спектрального анализа. Наихудший случай нагружения обусловлен сложением амплитуд нагрузок, так что максимальное превышение динамической нагрузки над статической может составить 13–14 % от значения статической нагрузки.

Торможение груза при опускании вызывает значительные колебания напряжений в металлоконструкции крана, составляющие 6–7 % от статической нагрузки. Проезд крана ступеньки высотой 3–4 мм вызывает незначительные напряжения в металлоконструкции.

При работе крана возможны случаи, когда нагрузки, возникающие от различных видов нагружения, складываются между собой. Наиболее нагруженным является случай, когда совпадают максимальные нагрузки от воздействия торможения груза при опускании и торможения грузовой тележки с плохо отрегулированными тормозами.

7.2.3. Анализ нагруженности элементов металлоконструкции

При натурном тензометрировании элементов металлоконструкций крана ЛТ-62Б в контрольных точках, расположение которых показано на рис. 7.2.3, были получены достаточно представительные осциллограммы изменения напряжений в этих точках. Поскольку суммарный цикл работы крана, как указывалось выше, имеет достаточный разброс со средним значением 11,5 мин, то, чтобы привести эти осциллограммы к единому виду, была проведена фильтрация сигналов, и все повторяющиеся значения (пока конструкция испытывает лишь статические нагрузки) – отброшены. Три типичные осциллограммы напряжений (контрольная точка 11) представлены на рис. 7.2.4, где хорошо видна внутренняя последовательность одного цикла работы или, другими словами, блока нагружения крана. Сперва напряжения в конструкции растут при подъеме захваченного груза до своих максимальных значений в зависимости от массы груза, затем происходит перемещение груза в необходимое место. На этом пологом участке видны сравнительно небольшие колебания в пределах 1–3 МПа, возникающие от неустановившегося движения крана по рельсам, и большие размахи в пределах 3–8 МПа, обусловленные перекосными динамическими нагрузками, а также проездом крана стыков и ступенек на рельсах.

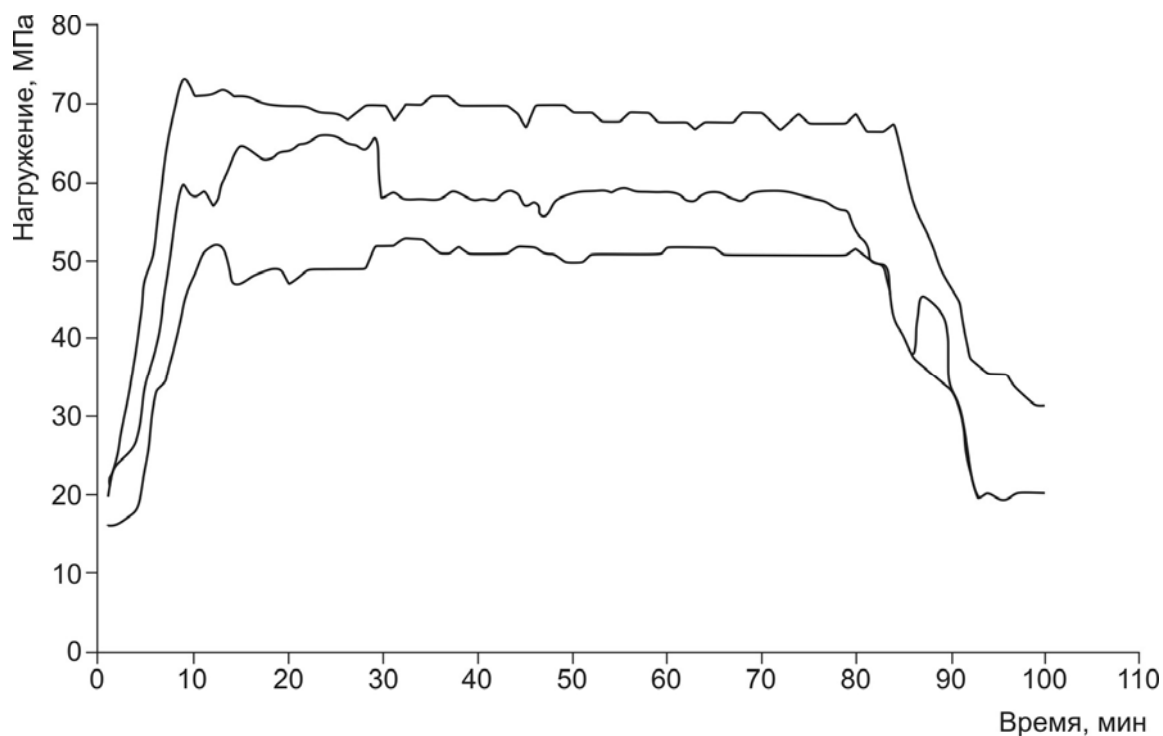


Рис. 7.2.4. Пример реализации процесса нагружения металлоконструкции крана (датчик № 11)

1. Анализ амплитуд процесса нагружения

Проведенная по методу дождя обработка процессов нагружения позволила выделить петли гистерезиса с набором амплитуд, соответствующих трем контрольным элементам, обозначенным ранее: 1) уголок нижнего пояса, 2) двутавр верхнего пояса, 3) уголок внутренней панели опоры крана. В табл. 7.2.4 приведены оценки параметров распределения Вейбулла, аппроксимирующего выборки реальных амплитуд процессов нагружения для трех контрольных элементов.

Таблица 7.2.4

Оценки параметров распределения Вейбулла

Название элемента	Параметры распределения Вейбулла	
	Масштаб c , МПа	Форма b
1. Уголок нижнего пояса	23,4	5
2. Двутавр верхнего пояса	40,4	4
3. Уголок опоры	29,5	4

Распределения амплитуд нагружения для элементов 1–3 представлены на вейбулловской вероятностной бумаге в соответствии с табл. 7.2.4 на рис. 7.2.5.

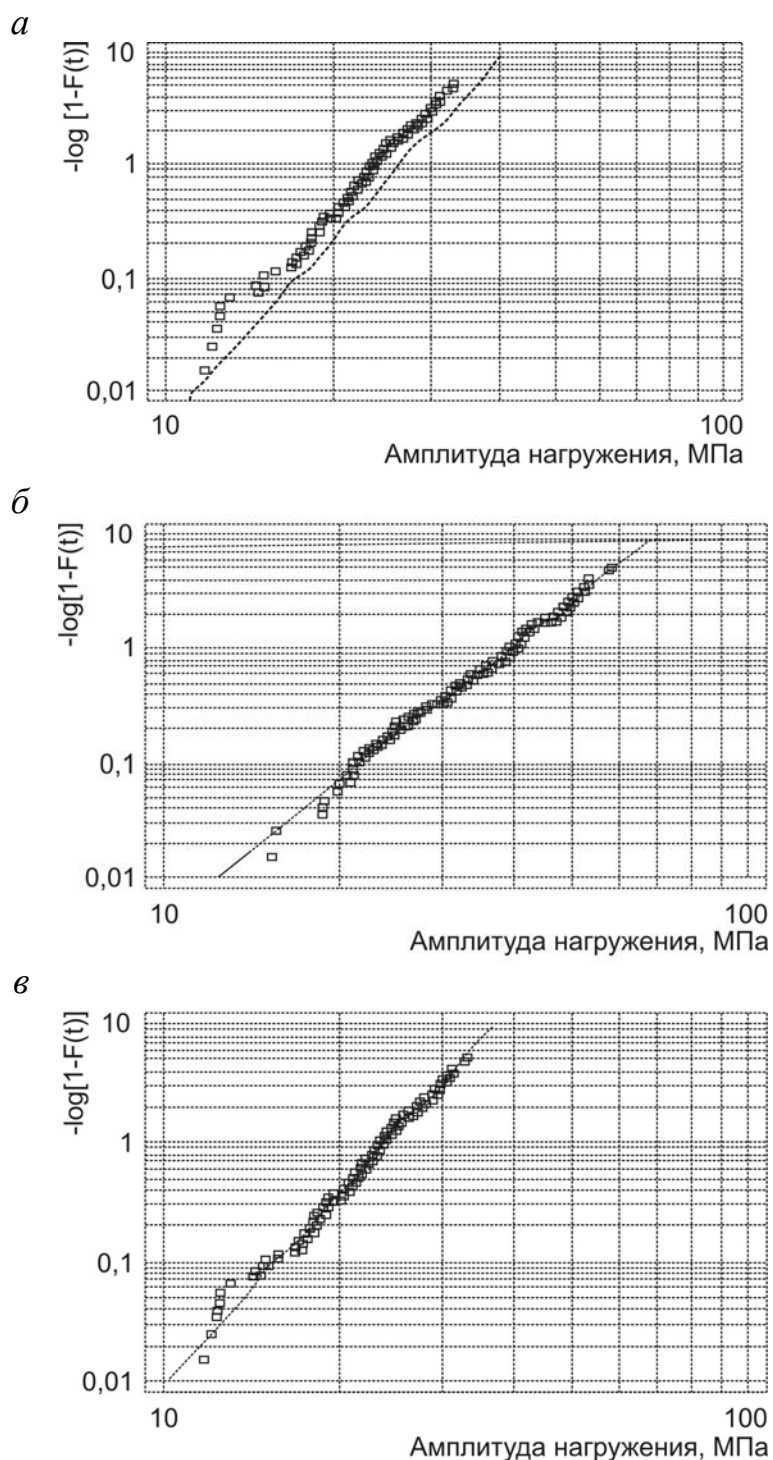


Рис. 7.2.5. Распределения амплитуд нагружения для элементов крана на вейбулловской вероятностной бумаге:

a – для уголка нижнего пояса; *б* – для двутавра верхнего пояса; *в* – для уголка опоры

Следует отметить, что графики амплитуд процессов нагружения строились с учетом среднего значения каждого выделенного цикла нагружения. Поэтому один выделенный основной цикл нагружения, соответствующий всему циклу подъема, перемещения и опускания груза, не оказался существенно правее остальных внутренних циклов с меньшими амплитудами. У этих выделенных амплитуд существенно большие средние значения, что дало своеобразный эффект, сдвинув все эти амплитуды вправо в сторону их увеличения при переводе в эквивалентные амплитуды с нулевым средним значением.

2. Число циклов нагружения

В процессе обработки осциллограмм по методу дождя при выделении петель гистерезиса производился также подсчет числа циклов нагружения за рассматриваемый блок нагружения – подъем, перемещение и опускание груза. При обработке нескольких однотипных осциллограмм формируется выборка числа циклов нагружения за один блок, состоящая из целых чисел с минимальным и максимальным наблюдаемыми значениями: 24 и 46. Случайная величина v_b – число циклов нагружения за один блок – может быть достаточно хорошо описана распределением Пуассона с параметром $\lambda = 34$:

$$P\{v_b = i\} = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, i = 1, 2, \dots$$

Ранее были получены средние значения числа блоков нагружения крана по месяцам. Исходя из этой информации, можно получить соответствующие характеристики уже не только блоков нагружения в месяц и циклов нагружения за один блок, но и суммарное число циклов нагружения элементов за месяц и год, если воспользоваться центральной предельной теоремой теории вероятностей.

Во-первых, из теории вероятностей известно, что операция сложения k независимых пуассоновских величин дает также распределение Пуассона с параметром $k\lambda$. С другой стороны, известно, что распределение Пуассона при больших λ достаточно хорошо может быть аппроксимировано с помощью нормального распределения со средним λ и дисперсией λ . Во-вторых, центральная предельная теорема гласит, что распределение большого числа слагаемых, грубо говоря, вне зависимости от исходного распределения асимптотически приближается к нормальному. Если же исходное рас-

пределение каждого независимого слагаемого имеет нормальное распределение, то математическое ожидание m_η и стандартное отклонение σ_η суммы циклов за год η равно 423096 и 650, соответственно. Значения k берутся как константы – средние значения из табл. 7.2.3. Методы нахождения распределений случайного числа случайных слагаемых не использовались.

7.2.4. Коэффициенты концентрации напряжений и данные о выносливости элементов

В п. 1.4.3 был сделан вывод о том, что для инженерных расчетов на усталость достаточно учесть коэффициент концентрации действующих напряжений K , влияющий на снижение предела выносливости элемента по сравнению с лабораторными образцами.

Для того чтобы учесть влияние концентрации напряжений на снижение усталостной долговечности, достаточно поделить среднее значение предела выносливости, полученное для образцов S_{-1s} , на соответствующий коэффициент концентрации напряжений, который можно получить расчетным путем, либо использовать накопленный опыт расчетов конструкций на усталость и воспользоваться готовыми таблицами [35, 54].

Итак, предел выносливости детали S_{-1} определяется по пределу выносливости образца S_{-1s} следующим образом:

$$S_{-1} = S_{-1s}/K. \quad (7.2.3)$$

Проведенный точный расчет коэффициентов концентрации напряжений в элементах крановых металлоконструкций металлургического производства [91] показал совпадение расчетных значений $K = 2,6-2,9$ с табличными значениями $K = 2,9$ [54] для 1-го и 3-го контрольных элементов с поперечными и лобовыми швами приварки уголков к косынкам.

Элементы металлоконструкции крана изготовлены из стали 09Г2С, имеющей предел выносливости $S_{-1s} = 120$ МПа и предел текучести 350 МПа [85]. Тогда среднее значение предела выносливости контрольных элементов 1 и 3 будет равняться $ES_{-1} = 41$ МПа.

При стандартном коэффициенте вариации, равном 0,1, соответствующее значение стандартного отклонения получается $\sigma_{S_{-1}} = 4,1$ МПа.

Контрольный элемент 2 представляет собой двутавр, ослабленный отверстиями для крепления рельс к верхней полке (рис. 7.2.6). Достаточно большие местные напряжения, возникающие в нем от действия локального изгиба,

являются «подозрительными» в плане накопления усталостных повреждений. В соответствии с таблицами, представленными в МУ РД 50-694-90 [54], коэффициент концентрации такого элемента следует принять $K = 1,8$, что дает среднее значение предела выносливости $ES_{-1} = 67$ МПа. При аналогичном коэффициенте вариации, равном 0,1, соответствующее значение стандартного отклонения получается $\sigma_{S_{-1}} = 6,7$ МПа.

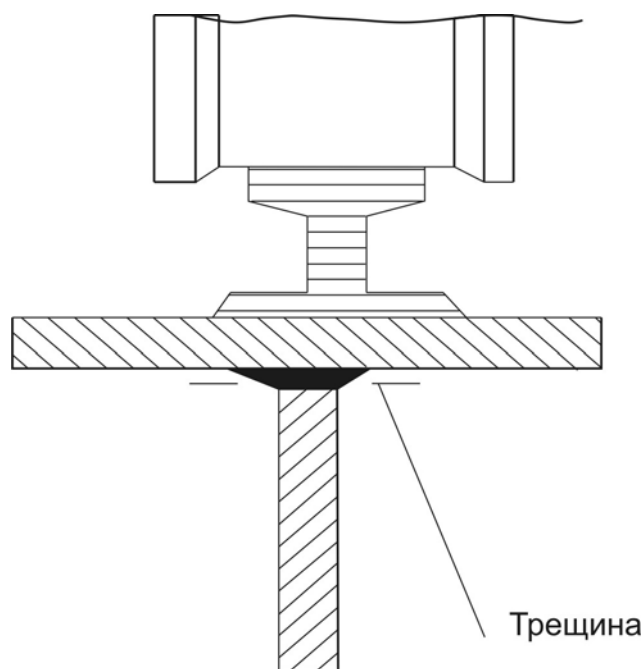


Рис. 7.2.6. Место возникновения трещины в элементе

Также для расчетов потребуются значения точки перелома кривой усталости, которую можно принять

$$N_0 = 5 \cdot 10^6,$$

и значение наклона кривой усталости в двойных логарифмических координатах: $m = 4,5$ для контрольных элементов 1 и 3, $m = 5,5$ для контрольного элемента 2.

Приведенные значения пределов выносливости элементов и известные значения амплитуд нагружения говорят о том, что эти элементы находятся под воздействием накопления усталостных повреждений, поскольку диапазоны изменения величин пересекаются с некоторой, существенно отличной от нуля, вероятностью. Отсюда можно сделать вывод о необходимости проведения расчета на усталостную долговечность и решения задачи прогнозирования ресурса.

7.2.5. Прогнозирование распределения ресурса элементов металлоконструкции крана

На основании проведенных ранее исследований был сделан вывод о том, что данная металлоконструкция крана ЛТ-62Б содержит три типа элементов, которые могут быть подвержены усталостному накоплению повреждений.

Подстановка найденных гистограмм нагружения каждого из элементов в программу расчета долговечности по модели 3 (гл. 4) при указанных в п. 7.2.4 сведениях о долговечности при регулярном нагружении позволила получить искомые значения математического ожидания и стандартного отклонения ресурса в числе блоков нагружения для всех трех типов контрольных элементов, приведенные в табл. 7.2.5.

Таблица 7.2.5

Значения математического ожидания и стандартного отклонения ресурса
в числе блоков нагружения

Название элемента	Параметры распределения ресурса	
	Среднее (блоки)	Стандарт (блоки)
1. Уголок нижнего пояса	106800	58200
2. Двутавр верхнего пояса	143200	79000
3. Уголок опоры	74620	32300

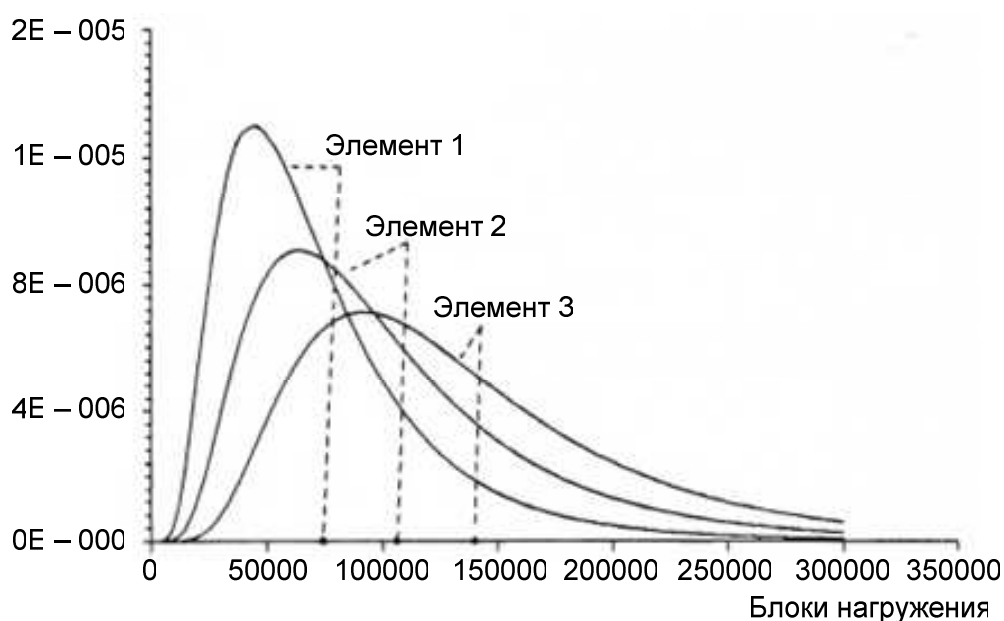


Рис. 7.2.7. Плотности распределений ресурса элементов металлоконструкции крана

Из табл. 7.2.5 видно, что наименьшим ресурсом обладает контрольный элемент 3. Если вспомнить среднее число блоков нагружения за год, равное 12719, то становится ясно, что срок службы крана до появления трещин усталости в сварных элементах невелик. Среднее время до появления наблюдаемых трещин в сварных швах опоры составляет 8,5 лет для элемента 1, 11,5 лет для элемента 2 и 6 лет для элемента 3. Плотности распределений прогнозируемого ресурса изображены на рис. 7.2.7.

7.3. Функции сопротивления усталости конвейерных лент при сдвиговых деформациях

Моделируется усталостное поведение образцов трех типов конвейерных лент, подверженных циклическим сдвиговым деформациям [37]. Явление усталостного накопления повреждений ленты описывается при помощи убывающего предела прочности на сдвиг, которое определяется как критический угол, приводящий к расслоению в центральных резиновых слоях ленты.

Существуют различные типы повреждений резинотканевых конвейерных лент: абразивный износ верхней и нижней резиновых обкладок и бортов, сквозной пробой сердечника ленты, расхождение стыков и др. При нормальных и хорошо контролируемых условиях эксплуатации определяющим повреждением становится усталостное расслоение многопрокладочной ленты, вызываемое сдвиговыми деформациями, которые появляются в резиновых слоях под действием циклического нагружения во время работы ленты. Расслоение ленты происходит под действием межслоевых сдвигов, возникающих при периодических изгибах ленты на барабанах и роlikоопорах, а также при локальном нагружении ленты от воздействия крупнокускового перегружаемого материала в загрузочном пролете.

Хорошо известно, что высокие напряжения растяжения композитов в направлении приложения силы сопровождаются небольшими сдвиговыми напряжениями. В случае нормальных сдвигов внутренние усталостные трещины ведут себя подобно трещинам в линейной механике разрушения. Существует несколько работ, посвященных структурному подходу к изучению усталостного повреждения слоистых материалов с использованием линейных и нелинейных методов механики разрушения [102, 103]. Используемый здесь феноменологический подход, однако, дает простоту понимания взаимосвязи между наблюдаемыми в процессе эксплуатации усталостными трещинами и полученными в результате специальных испытаний на усталость под действием сдвиговых нагрузок.

Это исследование усталости материала, в данном случае образцов из резиноканевых конвейерных лент, отличается от других [94, 102, 103, 109] интерпретацией причины расслоения лент. Предполагается, что под действием циклических сдвиговых нагрузок расслоение ленты происходит, когда значение сдвиговой деформации достигает предела прочности на сдвиг, изменяющегося в процессе циклического нагружения. Предполагая линейную зависимость между касательными напряжениями и сдвиговыми деформациями в сквидах резиноканевой ленты в области малых деформаций, пределом прочности условно можно считать относительный сдвиг α_0 , соответствующий разрушающему сдвиговому напряжению $[\tau_0]$ при однократном нагружении [37]. Иными словами, разрушение ленты происходит тогда, когда угол сдвига сквида от действия внешних нагрузок достигает изменяющегося предела прочности α .

Эти гипотезы кажутся очевидными, но полезны они только тогда, когда изменяющийся предел прочности может быть промоделирован монотонно убывающей функцией, которую назовем функцией сопротивления усталости (ФСУ) с целью обобщения этого понятия и применения его к другим типам нагружения.

Идея истощения вязкости сталей в качестве основы для изучения усталостного повреждения предложена в работе Г. Сакса [133]. Позднее было показано, что при циклических нагрузках уменьшаются твердость и вязкость, но увеличиваются критическая прочность и экспонента упрочнения [122]. Математическая теория для того, чтобы использовать это явление в предсказании долговечности, была сформулирована Гаттсом [110], который предположил, что прочность и пределы выносливости изменяются непрерывно в течение циклического нагружения пропорционально функциям размаха деформаций и описываются дифференциальными уравнениями.

Простой метод предсказания усталостных свойств некоторых сплавов был предложен С. Д. Волковым и В. И. Мироновым [14] на основе функций сопротивления, хотя их рекомендации по использованию включали предостережение от совершения необдуманных действий с подобной моделью. Для того чтобы оценить возможность применения этого подхода к решению проблем предсказания долговечности резиноканевых конвейерных лент на основе моделирования их поведения с помощью ФСУ типа убывающих степенных функций, было проведено три вида испытаний: стандартные испытания на усталость с нагружением при постоянной амплиту-

де, испытания с прециклированием и последующим статическим разрушением и двухуровневые усталостные испытания. Экспериментальные результаты показали, что ФСУ могут быть приняты в качестве приближенной модели для предсказания усталостного поведения конвейерных лент при нагружении со сдвиговыми деформациями.

7.3.1. Функции сопротивления усталости

Конвейерную ленту, работающую в эксплуатационных режимах, условно можно рассматривать в виде испытательного стенда с весьма высокой степенью повторяемости нагрузок (рис. 7.3.1). Критическое сопротивление сдвигу принимается здесь как минимальное сдвиговое напряжение, которое не вызывает расслоения и появления различных видимых трещин на срезе образца. Далее будет показано, что сопротивление ленты на сдвиг α уменьшается в процессе циклического нагружения. Сопротивление сдвигу рассматривается как функция истории нагружения

$$\{\gamma(n)\} = \{\gamma_1(n_1), \gamma_2(n_2), \dots, \gamma_i(n_i), \dots\},$$

где амплитуда γ_i прикладывается n_i раз выделенных циклов нагружения.

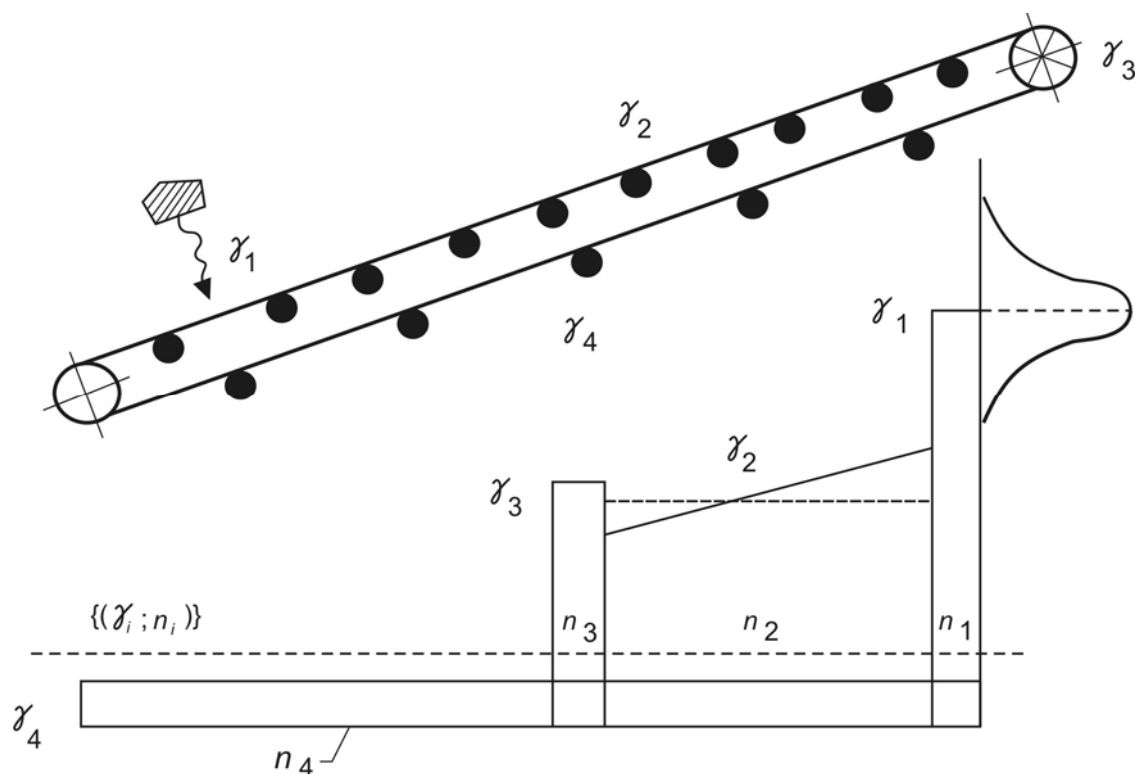


Рис. 7.3.1. Схема нагружения конвейерной ленты

Для того чтобы воспользоваться методологией, рассмотренной в предыдущих главах, необходимо, во-первых, ввести гипотезу о существовании ФСУ и о форме, в которой эти функции могут быть описаны.

Гипотеза 1: о существовании ФСУ.

Предполагается, что при циклическом нагружении образцов расслоение ленты происходит только тогда, когда амплитуда угла сдвига γ от действия истории нагружения $\{\gamma(n)\}$ превышает убывающий циклический предел прочности $\alpha\{\gamma(n)\}$, зависящий от этой истории.

Определение функции $\alpha\{\gamma(n)\}$ экспериментальным путем для всех историй нагружения $\{\gamma(n)\}$ реализовать практически невозможно, так как имеется бесконечное число вариантов нагружения. Из этого следует, что нужно получить ФСУ только для циклических нагрузок с постоянным значением амплитуд γ . В случае нагружения с непостоянной амплитудой ФСУ могут быть найдены при помощи некоторых правил накопления повреждений. Поэтому рассмотрим сначала способ синтеза ФСУ для ленты, подверженной циклическому нагружению с постоянной амплитудой, когда $\{\gamma(n)\} = \gamma$, а ФСУ запишем как $\alpha(\gamma, n)$. ФСУ и соответствующая кривая усталости ленты показаны на рис. 7.3.2. Сначала серия образцов циклически нагружается заданным числом циклов n_1 с амплитудой γ , после чего они разрушаются под действием статического нагружения, среднее значение пределов прочности разрушенных образцов определит ордината $\alpha(\gamma, n_1)$. Затем на том же постоянном уровне амплитуды сдвига γ другая серия образцов нагружается циклически до числа циклов n_2 и каждый из них однократным нагружением доводится до разрушения и т. д. Аппроксимируя точки $\alpha(\gamma, n_i)$, $i = 1, 2, \dots$, непрерывной функцией $\alpha(\gamma, n)$, определяем ФСУ ленты для некоторой амплитуды сдвига γ . Далее описанный метод может быть повторен для другого значения γ .

Удобно использовать степенную аппроксимацию ФСУ:

$$\alpha(\gamma, n) = \alpha_0 - B(\gamma)n^{k(\gamma)}, \quad (7.3.1)$$

где α_0 – начальное сопротивление сдвигу (т. е. предел прочности материала для однократного нагружения);

$k(\gamma)$, $B(\gamma)$ – коэффициенты, определяемые на испытаниях с различными значениями γ .

Сформулируем правило пересечения. Кривая ФСУ пересекает кривую усталости в точке W , абсцисса которой совпадает с моментом расслоения

ния материала, так как приложенная нагрузка γ достигает значения циклического предела прочности, а значит, имеет силу уравнение

$$\alpha(\gamma, N(\gamma)) = \gamma. \quad (7.3.2)$$

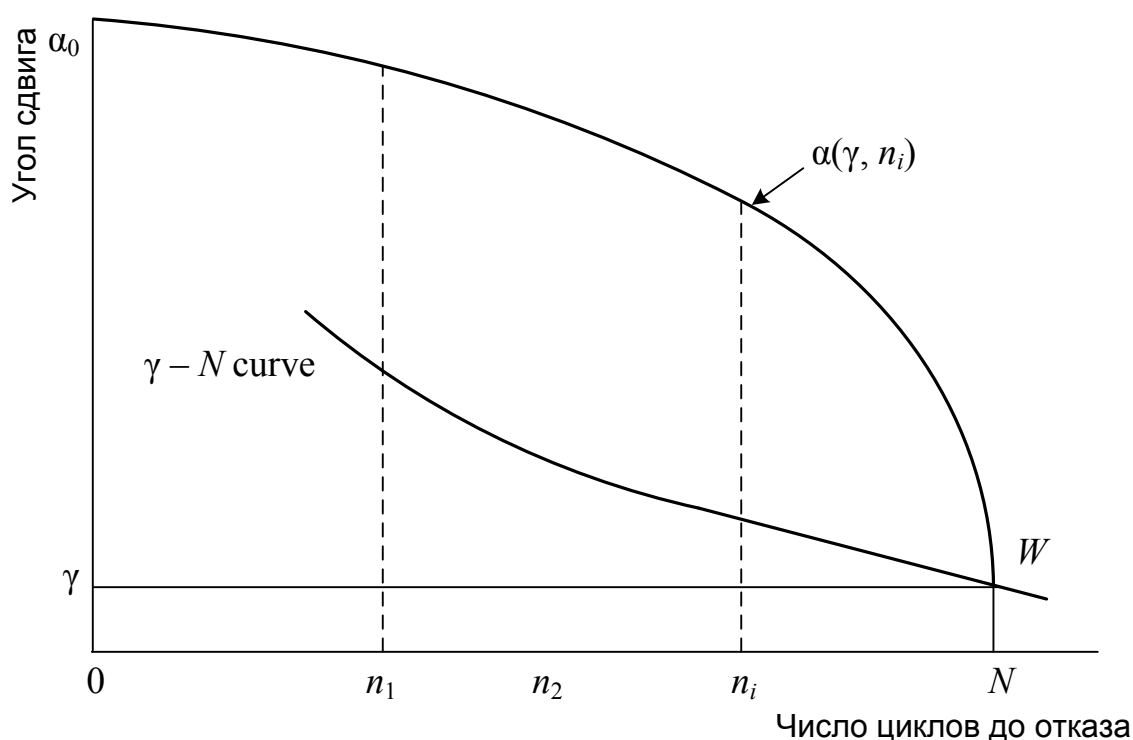


Рис. 7.3.2. Функция сопротивления усталости для регулярного нагружения и кривая усталости (линейная шкала)

Подставляя уравнение (7.3.1) в уравнение (7.3.2), получаем выражения для $B(\gamma)$ и, следовательно, для $\alpha(\gamma, n)$ как функции усталостной долговечности $N(\gamma)$ в виде

$$\alpha(\gamma, n) = \alpha_0 - (\alpha_0 - \gamma)[n/N(\gamma)]^{k(\gamma)}. \quad (7.3.3)$$

Уравнение (7.3.3) показывает, что для определения ФСУ необходимы стандартные усталостные испытания – чтобы найти $N(\gamma)$ и специальные испытания – чтобы найти $k(\gamma)$.

Во второй гипотезе формулируется условие эквивалентности (состояний) мер повреждения и продолжительности нагружений образцов при циклических испытаниях на различных уровнях нагружения. Состояние образца после приложения сложной истории нагружения может определяться, согласно этому правилу, при помощи множества ФСУ.

Гипотеза 2: об эквивалентности состояний.

Две различных истории нагружения $\{\gamma_1(n_1)\}$ и $\{\gamma_2(n_2)\}$ приводят образец в одно и то же состояние, если результаты их действия равны:

$$\alpha\{\gamma_1(n_1)\} = \alpha\{\gamma_2(n_2)\}. \quad (7.3.4)$$

Будущее поведение образца зависит только от будущей нагрузки и достигнутого в этот момент состояния и не зависит от предыдущей истории нагружения.

В теории вероятностей это допущение называется марковским свойством случайных процессов. На рис. 7.3.3 приведены функции сопротивления, определенные по уравнению (7.3.1), для двух уровней нагружения γ_1 и γ_2 с точками W_1 и W_2 , принадлежащими кривой усталости согласно правилу пересечения. Предложенное правило эквивалентности иллюстрируется на этом же рисунке. Для того чтобы найти эквивалентное состояние образца, если известно состояние $\alpha_1(\gamma_1, n_1)$ после первой стадии нагружения n_1 с амплитудой γ_1 , достаточно нарисовать горизонтальную линию от точки D_1 до точки пересечения D_2 с ФСУ $\alpha_2(\gamma_2, n)$, абсцисса D_2 определяет эквивалентное число циклов n_2' такое же, как если бы образец нагружался с амплитудой γ_2 .

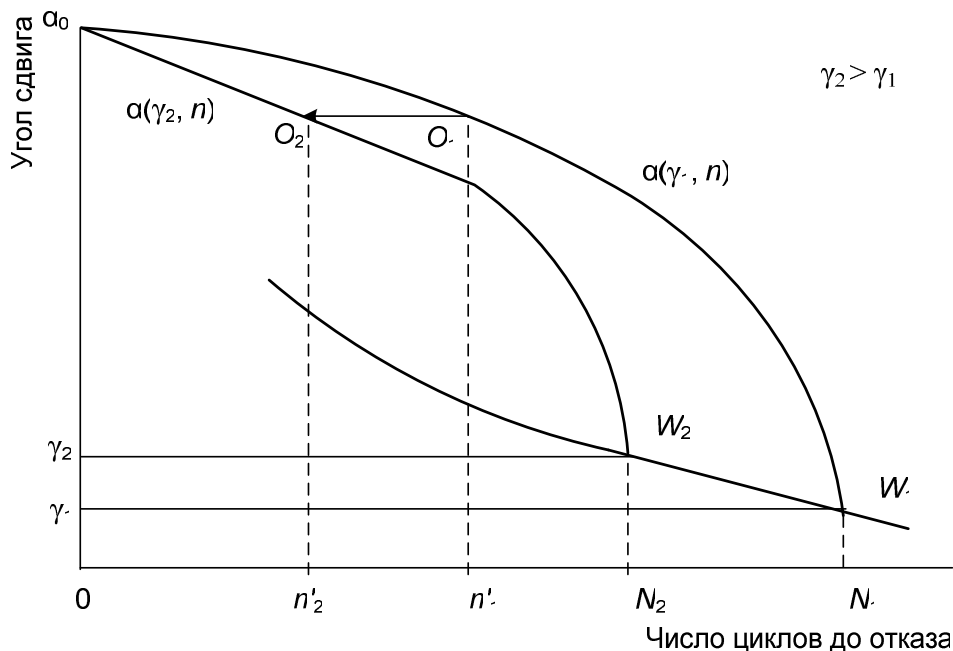


Рис. 7.3.3. Эквивалентность состояний для двухуровневого нагружения

Чтобы предсказывать усталостное поведение образцов при сложных историях нагружения, необходимо задать модель накопления повреждений. Правило эквивалентности, сформулированное выше, дает возможность определить состояние повреждения любого образца, если известны ФСУ для регу-

лярных историй нагружений и может быть отслежена его собственная история нагружения. Рис. 7.3.4, *а* иллюстрирует последнее прыжками с одной ФСУ на другую, а путь убывания предела прочности в течение истории нагружения показан на рис. 7.3.4, *б*. Конечно, эти рисунки демонстрируют только предполагаемый процесс деградации. Действительный же процесс накопления повреждений в образце неизвестен. Испытания, описанные далее, показывают, что этот графический способ вычислений является более предпочтительным, чем использование линейного правила накопления повреждений.

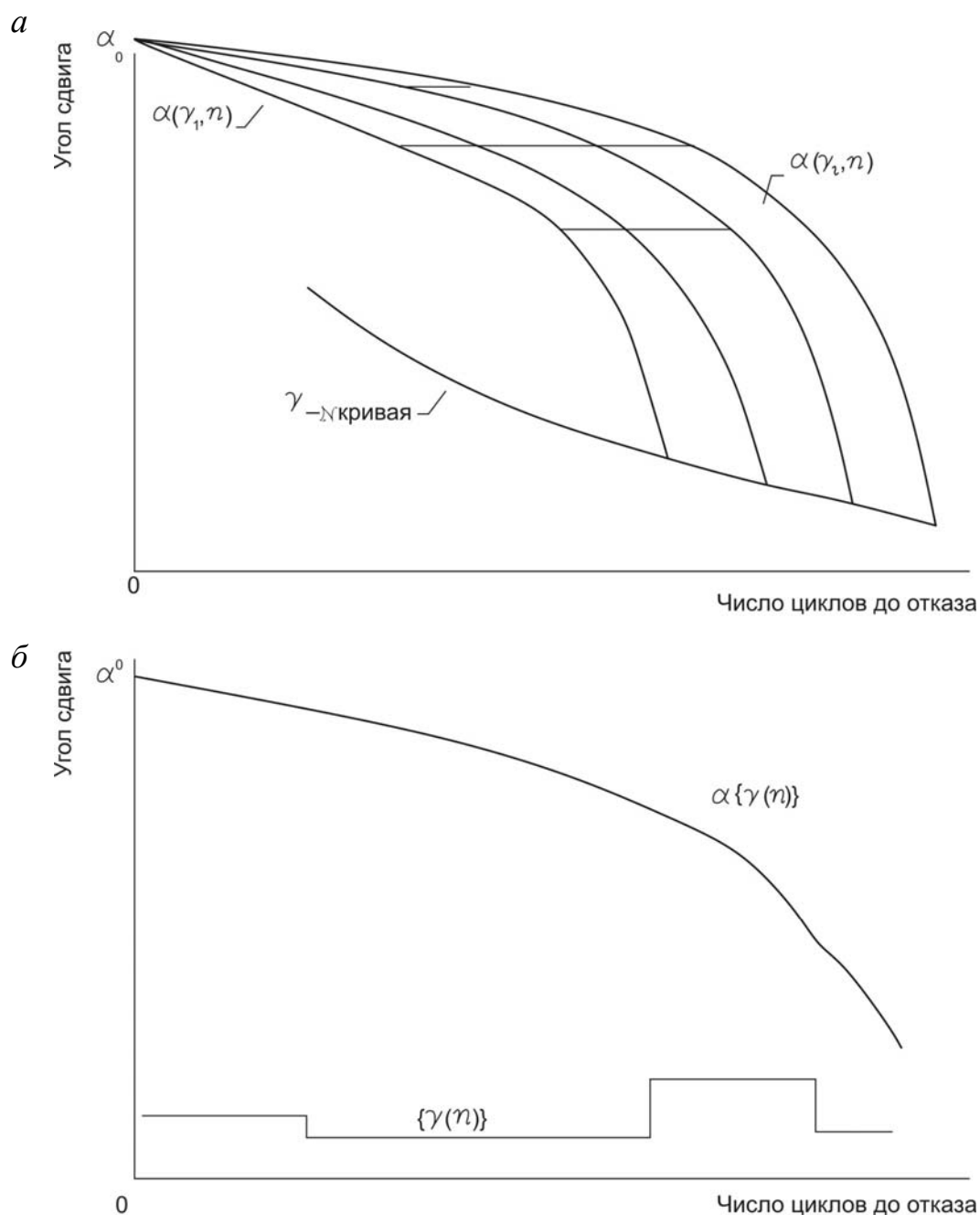


Рис. 7.3.4. Изменение состояния при сложном нагружении:
а – нахождение эквивалентных состояний; *б* – результирующая ФСУ

Для того чтобы доверие к предложенной модели, по крайней мере для двухуровневого нагружения, увеличилось, ожидаемые значения ресурса должны совпадать со значениями, полученными при испытаниях. При проведении испытаний на двухуровневое нагружение ресурс по данной модели определяется как

$$N_F = n_1 + N_2 - n_2' \quad (7.3.5)$$

или, с использованием выражения ФСУ, взятого из уравнения (7.3.3), как

$$N_F = n_1 + N_2 \left[1 - \left(\frac{\alpha_0 - \gamma_1}{\alpha_0 - \gamma_2} \right)^{1/k_2} \left(\frac{n_1}{N_1} \right)^{k_1/k_2} \right], \quad (7.3.6)$$

где k_1 и k_2 – коэффициенты – наклоны $\alpha(\gamma_1, n)$ и $\alpha(\gamma_2, n)$, соответственно.

Полученная по линейному правилу соответствующая усталостная долговечность N_L определяется как

$$N_L = n_1 + N_2 \left[1 - \frac{n_1}{N_1} \right]. \quad (7.3.7)$$

Из уравнений (7.3.6–7.3.7) понятно, что метод ФСУ аналогичен линейному правилу, когда $k_1 = k_2 = 1$. Таким образом, гипотеза Майнера является одним из частных случаев этого подхода. Определение повреждения как $(n/N)^k$ также может быть принято, если использовать гипотезы Рихарта – Ньюмарка [128] или Марко – Старки [121]. Различие между этими гипотезами и предложенной моделью заключается в физической интерпретации. Здесь делается попытка связать это повреждение, определяемое сдвиговым пределом прочности, с состоянием образца.

Следовательно, для того чтобы по мере повреждения одного образца, полученного в результате нагружения на уровне γ_1 , найти эквивалентное состояние этого же образца, но нагружавшегося на уровне γ_2 , достаточно провести из точки M_1 горизонтальный отрезок до пересечения с функцией сопротивления $\alpha_2(\gamma_2, n)$ в точку M_2 , абсцисса которой определит число циклов n_2' , как показано на рис. 7.3.5.

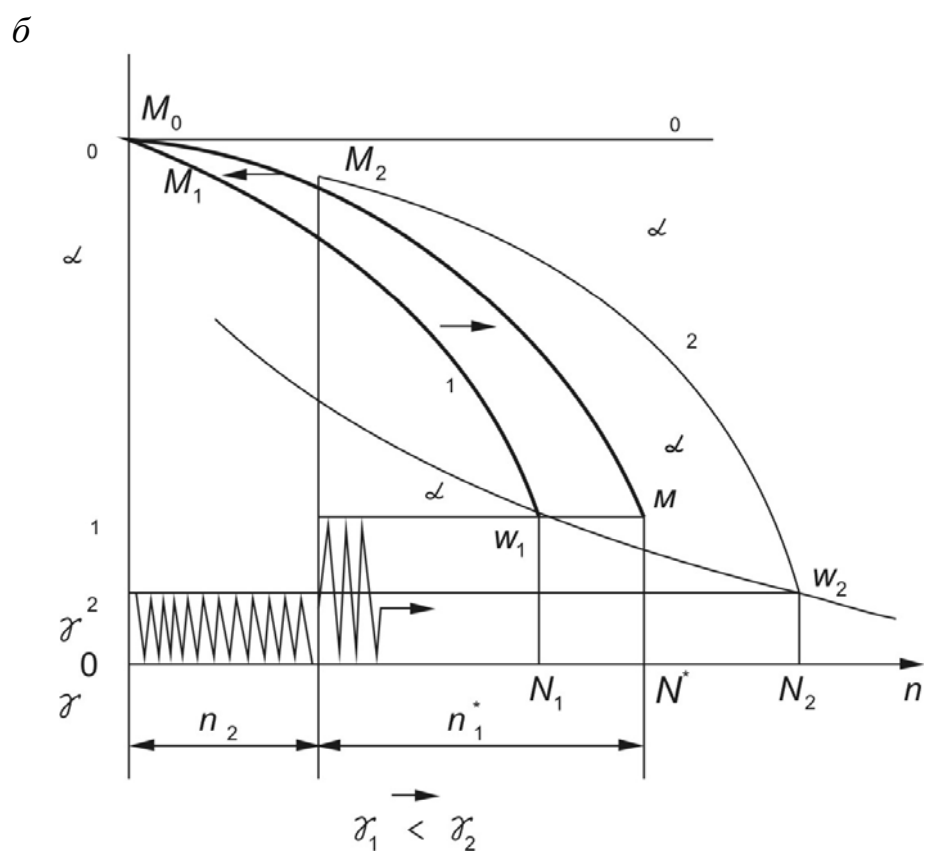
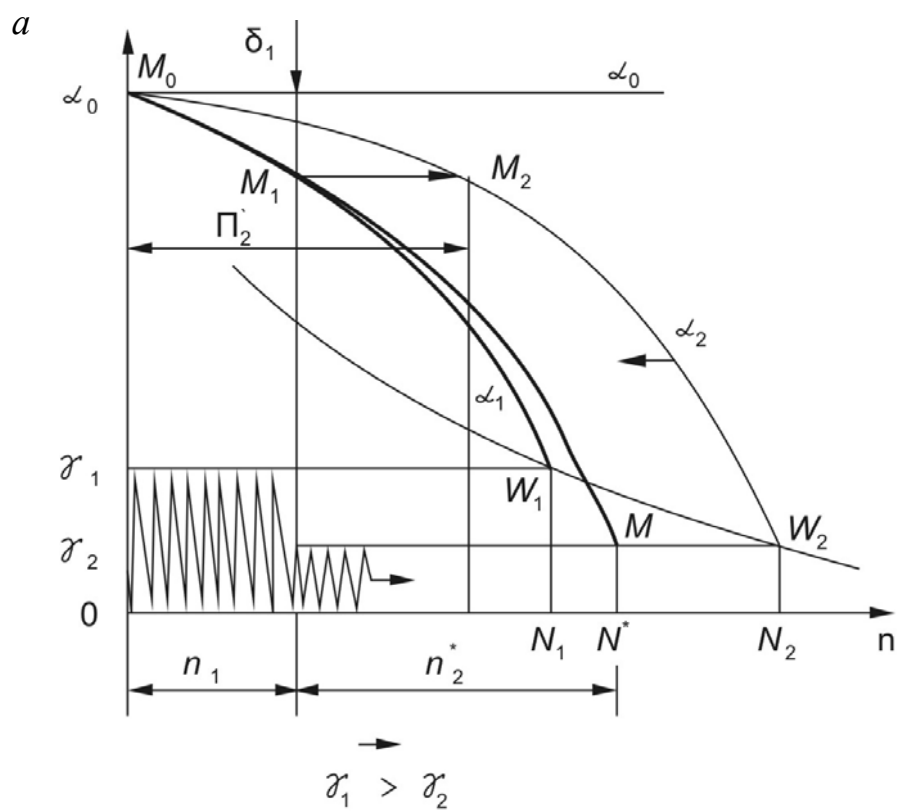


Рис. 7.3.5. Определение ресурса образца при двухуровневом нагружении:
 $a - \gamma_1 > \gamma_2$, $б - \gamma_1 < \gamma_2$

Продолжая после этого циклическое нагружение образца на уровне γ_2 до отказа, кинетику накопления повреждений возможно представить единственным образцом – движением по диаграмме ФСУ $\alpha_2(\gamma_2, n)$ от точки M_2 до точки W_2 , принадлежащей кривой Велера. Однако в связи с тем, что функция состояния (поврежденность) образца в процессе испытаний должна быть непрерывной, используем следующий прием. Началом нагружений на новом уровне γ_2 будем считать все-таки точку M_1 , а не точку M_2 (что соответствует физическому смыслу испытаний), а функцию сопротивления $\alpha_2(\gamma_2, n)$ на участке кривой $M_2 W_2$ переместим влево параллельным (эквидистантным) переносом по каждой ординате на величину отрезка $M_2 M_1$ до пересечения с уровнем нагружения γ_2 . Абсцисса точки M (естественно, что $W_2 M = M_2 M_1$) определит суммарную долговечность образца N^* .

Таким образом, показано, что существует поправка к гипотезе линейного суммирования повреждений. При любом значении числа циклов n_1 в интервале допустимых значений можно заранее предположить, что поправка (предлагаемого метода по отношению к гипотезе линейного суммирования повреждений) тем меньше, чем меньше модуль разности $|\gamma_1 - \gamma_2|$ между уровнями двухступенчатого нагружения.

Поскольку ФСУ являются нелинейными, то, казалось бы, разумно предположить, что если их преобразовать с помощью введения новой переменной φ к отрезкам прямых, то можно воспользоваться линейным правилом суммирования повреждений. Покажем, что это не так, для чего сделаем преобразование функции сопротивления усталости (3.1.3) введением новой переменной.

$$\varphi = \left(\frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha_0 - \gamma} \right)^{1/k(\gamma)}.$$

Тогда описание закона накопления повреждений при одноступенчатом нагружении принимает линейный вид

$$\alpha(\gamma, n) = n \left(\frac{B(\gamma)}{\alpha_0 - \gamma} \right)^{1/k(\gamma)}, \quad (7.3.8)$$

а рис. 7.3.5 преобразуется в рис. 7.3.6, который отражает взаимнооднозначное преобразование кривых $\alpha(\gamma, n)$ в $\varphi(\gamma, n)$. Считаем, что отказ происходит при $\varphi = 1$.

Подставляя (7.3.3) в (7.3.8), приходим к тому, что φ на самом деле есть $\varphi = n/N$, как и для правила Майнера. К сожалению, при таком переходе теряется свойство параллельного перехода с точки M_1 на точку M_2 , выражающее

принцип эквивалентности состояний. Теперь, чтобы получить эквивалентное конечное состояние при двухступенчатом нагружении, потребуется непараллельный перенос точки M_1 на точку M_2 , как это показано на рис. 7.3.6.

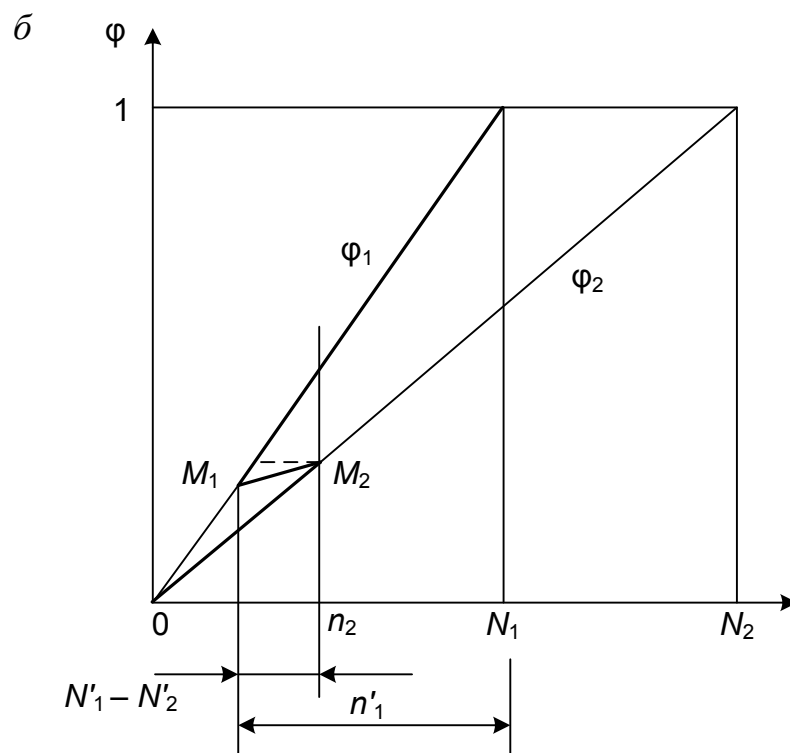
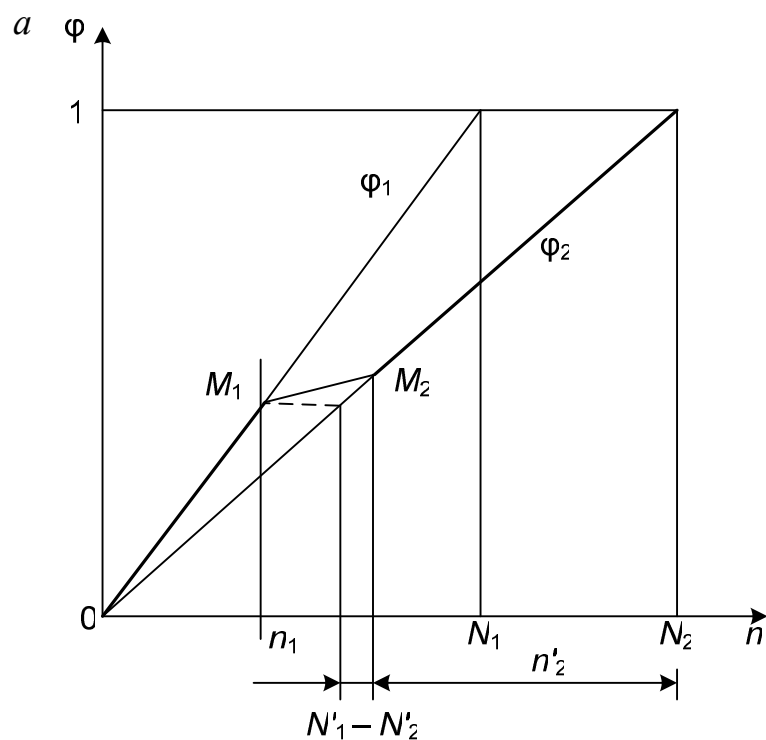


Рис. 7.3.6. Преобразование функций сопротивления к линейному виду:

$$a - \gamma_2 > \gamma_1; \quad б - \gamma_2 < \gamma_1$$

Эти соотношения хорошо проиллюстрированы далее, в п. 7.3.3, при обсуждении результатов экспериментальных исследований ресурса ленты при двухуровневом нагружении, где также приводится качественный анализ зависимости ресурса от порядка приложения нагрузки. Последнее, как оказалось, является весьма важной характеристикой для определения реальной долговечности образцов конвейерной ленты.

7.3.2. Описание экспериментов

Сравнительная характеристика различных типов конвейерных лент по сопротивлению усталостному разрушению резиновых прослоек от сдвиговых напряжений производилась на основе усталостных испытаний образцов лент с последующей статистической обработкой экспериментальных данных.

Выявление масштабного эффекта при переносе результатов испытаний лабораторных образцов на полноразмерные ленты, а также учет чувствительности материалов к концентрации напряжений зависит от уровней вероятности разрушения p . По мере снижения вероятности разрушения разница в пределах выносливости образцов различных размеров снижается, и при p , близких к нулю, предел выносливости всех образцов становится практически одинаковым [37], а коэффициент влияния абсолютных размеров поперечного сечения приближается к единице.

Данный факт имеет большое практическое значение для оценки несущей способности лент, ибо по результатам лабораторных испытаний образцов становится возможным определить кривые усталости полноразмерных лент. В совокупности с рассматриваемым здесь методом функции сопротивления усталости это позволит решить задачу по определению ресурсов при нестационарном нагружении, которое имеет место при обращении ленты в контуре конвейера.

Поскольку прочностные расчеты лент ведутся с коэффициентами запаса 8,5–10, в четырех случаях возможно такое стационарное нагружение, что напряжение сдвига превысит предел выносливости только в одном из сечений контура, и тогда для оценки ресурса ленты будет достаточно информации об ее усталостных свойствах при стационарном нагружении.

Структура и материал образцов трех типов ленты обозначены в табл. 7.3.1. Образцы с номинальными размерами 35×22 мм вырезались из конвейерной ленты производства Уральского завода резиновых технических изделий (Екатеринбург).

Таблица 7.3.1

Характеристики образцов конвейерной ленты

Тип ленты	Материал	Число слоев	Толщина ленты, мм	Толщина на слой, мм	Прочность на растяжение, кН/м на слой
ЕР-315	Полиэстер	6	19	1,7	315
ТА300/8	Полиамид	8	21	1,9	300
МК400	Нейлон+хлопок	4	23	2,1	400

Эксперимент проходил в три этапа:

- 1) испытания на усталость с целью определения квантильных кривых усталости;
- 2) циклическое нагружение и статическое разрушение для синтеза ФСУ;
- 3) испытания с двухуровневым нагружением для сравнения действительных и вычисленных значений усталостной долговечности.

Программа была выполнена полностью только для ленты ТА-300/8, другие два типа лент прошли только через первый этап. Перед испытаниями была выполнена процедура калибровки образцов для того, чтобы определить смещение амплитуды слоев A (рис. 7.3.7) от верхней до нижней обкладок (угол сдвига центрального слоя γ показан на рис. 7.3.8). В этом случае сдвиговые нагрузки любого типа материала образца и геометрии сводятся к сдвиговым деформациям, определяемым углом γ . Критерием отказа служило появление трещин расслоения длиной 3–4 мм, видимых со стороны бортов. В ходе испытания с частотой около 50 Гц образцы подвергались поперечному поджатию с постоянным усилием. Вследствие этого поджатия и сложного характера деформаций напряженно-деформированное состояние образца отличалось от чистого сдвига и максимальные напряжения сдвига оказались незначительно выше нейтральной оси ленты. Проблемы деформирования и механики разрушения конвейерной ленты изучались Г. Г. Кожушко [37] на основе метода вариаций. Однако здесь

эти задачи структурной механики были проигнорированы, чтобы связать сдвиговую деформацию непосредственно с углами, измеряемыми при испытаниях. Расслоение под действием циклических испытаний происходило в слое, расположенном посередине или чуть выше.

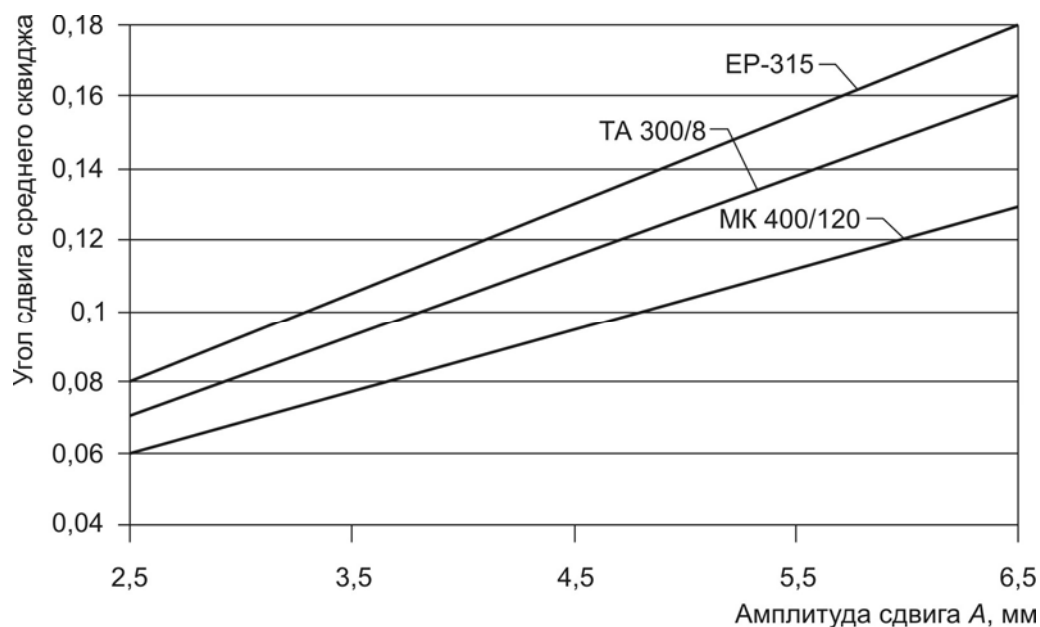


Рис. 7.3.7. Тарировочная зависимость величины угла сдвига сквида от амплитуды

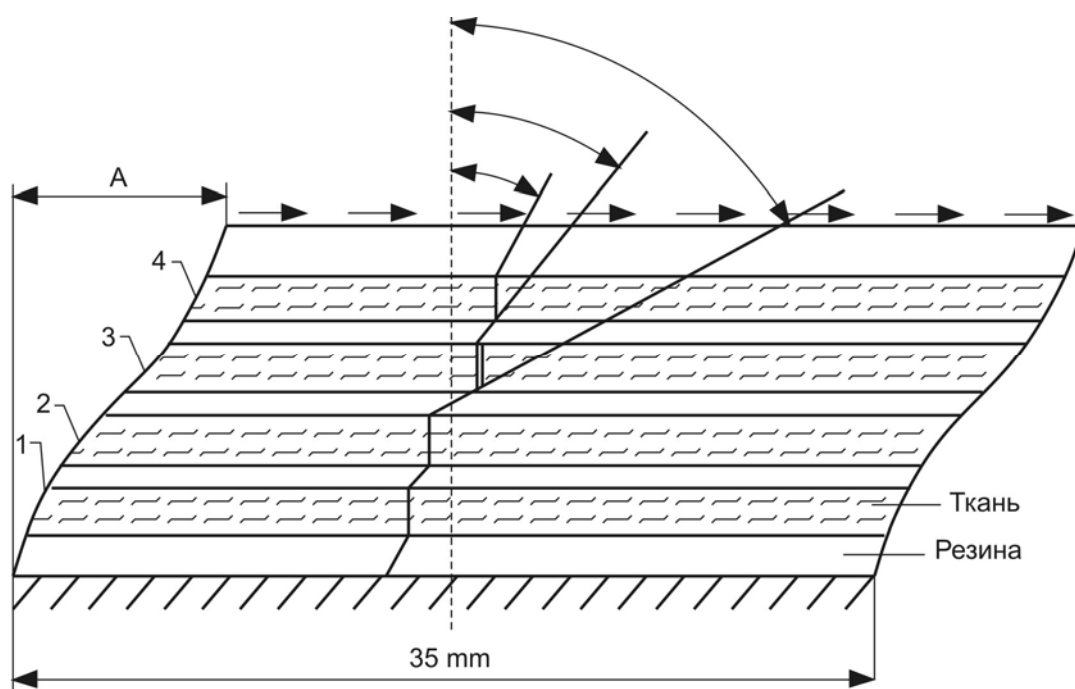


Рис. 7.3.8. Распределение углов в резиновых слоях ленты

В усталостных испытаниях было реализовано пять амплитуд симметричного сдвигового циклического нагружения: $A = 2,5; 3,5; 4,5; 5,5; 6,5$ (мм), $\gamma = 0,154; 0,131; 0,107; 0,084; 0,060$ (радиан).

7.3.3. Обработка экспериментальных данных

Усталостные испытания образцов конвейерных лент проведены в соответствии с требованиями ГОСТ 9981–62 «Резина. Метод испытания модельных образцов шин на многократный сдвиг».

Обычные усталостные испытания. По восемь образцов лент каждого типа циклировались на брекерной машине на пяти выбранных амплитудах до появления расслоения в одной из резиновых прослоек, при этом фиксировалось число циклов нагружения до отказа. Результаты испытаний представлены на рис. 7.3.9 в виде эмпирических функций распределения числа циклов до отказа, аппроксимированных прямыми линиями на лог-нормальной вероятностной бумаге.

$$x_p = m(\gamma) + z_p \cdot s(\gamma), \quad (7.3.9)$$

где $m(\gamma)$ – выборочное среднее логарифма числа циклов до отказа образца;
 $s(\gamma)$ – среднеквадратичное отклонение;
 z_p – квантиль нормированного нормального распределения.

На рис. 7.3.9 видно, что ресурс образцов лент, подвергнутых номинально идентичным условиям испытаний, разный, а его эмпирические функции распределения можно описать логнормальным законом. Для каждого типа лент наклон изменяется в зависимости от амплитуды сдвига; причем, чем ниже амплитуда, тем больше разброс значений долговечности.

Средние кривые усталости лент показаны на рис. 7.3.10 в интервале $0,06 \leq \gamma \leq 0,154$.

После проведения первого этапа испытаний дальнейшие исследования проводились только с лентой ТА-300/8.

Вероятность разрушения образцов на каждом уровне нагружения определяется по квантильным кривым усталости. После аппроксимации $m(\gamma)$ и стандартного отклонения $s(\gamma)$ как функций угла сдвига γ

$$m(\gamma) = 6,371 - 11,39\gamma, \quad s(\gamma) = 0,2 - 1,2\gamma$$

квантили кривой усталости ленты с учетом уравнения (7.3.9) принимают вид

$$\log N = 6,371 - 11,39\gamma + z_p(0,2 - 1,2\gamma).$$

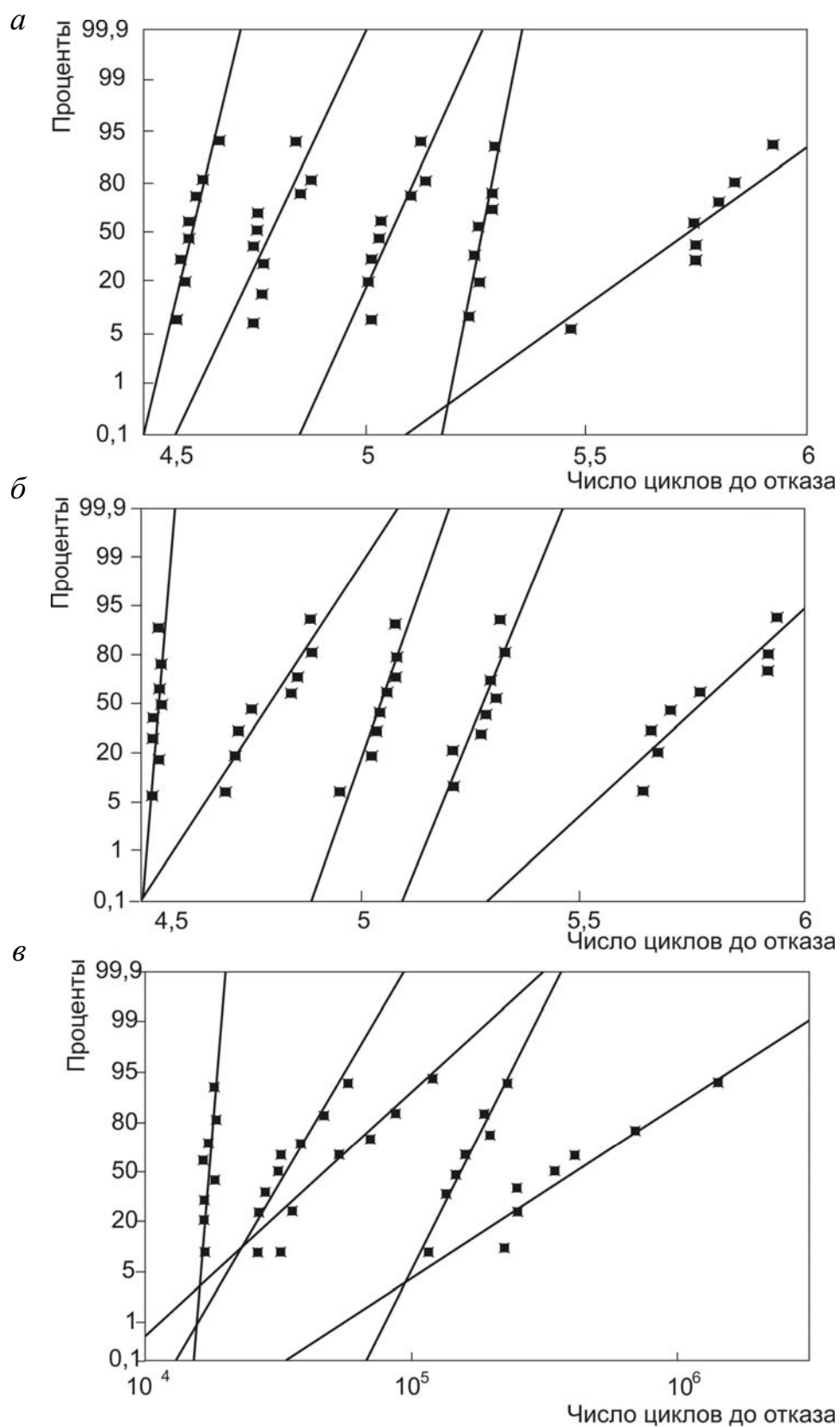


Рис. 7.3.9. Эмпирические функции распределения ресурса образцов на логарифмически нормальной шкале:
а – лента ТА 300/8; *б* – лента EP-315; *в* – лента МК 400/120

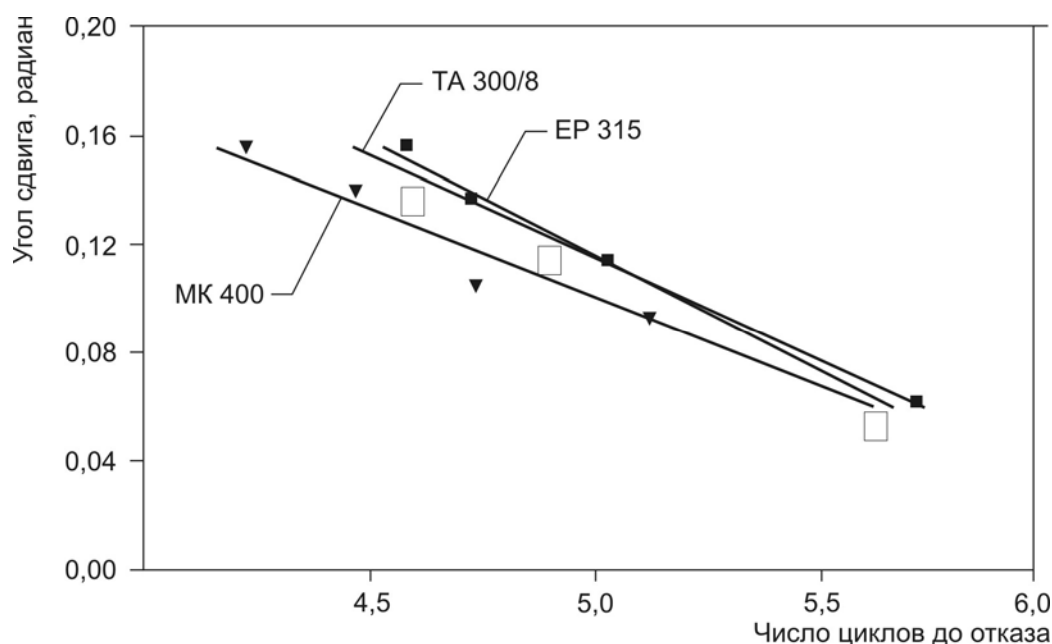


Рис. 7.3.10. Средние кривые усталости

При построении кривых усталости были проигнорированы результаты испытаний при угле сдвига $\gamma = 0,048$, поскольку они не укладываются в схему описания кривых усталости прямыми линиями в полулогарифмических координатах.

Многие исследователи указывают на наличие предела выносливости у конвейерных лент. Наши испытания и оценки нагрузок, приведенные для формирования блоков нагружения ленты при обращении ее в контуре конвейера, показали, что в реальности предел выносливости, возможно, и существует, но его значения находятся существенно ниже значений сдвиговых деформаций, при которых выборка становится усеченной. Поэтому следует предположить, что в области малых значений угла сдвига кривые усталости лишь изменяют свой наклон, и, значит, можно воспользоваться аналогичной процедурой для построения правых ветвей квантильных кривых усталости.

Циклическое нагружение и статическое разрушение. Необходимая для построения функции сопротивления усталости величина разрушающего напряжения при однократном нагружении определялась экспериментально на разрывной машине. В режиме одноосного нагружения фигурные образцы (рис. 7.3.11) доводились до разрушения резиновой прослойки их средней части. Величина сдвинутого разрушающего напряжения τ_0 оценивалась отношением разрывного усилия к площади сдвига $b \cdot l$, а деформация сдвига при раз-

рушении пересчитывалась по известному соотношению $\alpha_0 = \tau_0/G$, где G – модуль сдвига резины сквиджа. Следует заметить, что при больших деформациях, в общем случае, вид зависимости $\tau(\gamma)$ не установлен.

Зависимость между напряжениями и деформациями предлагается принимать в виде $\tau_{\max} = G[\tan\gamma + (\tan\gamma)^2]$, где второе слагаемое учитывает растягивающие напряжения в прослойке в направлении плоскости сдвига. При малых значениях угла сдвига его влияние на напряженное состояние незначительно, а главную роль играют касательные напряжения, определяемые первым слагаемым. При больших углах сдвига картина меняется на противоположную.

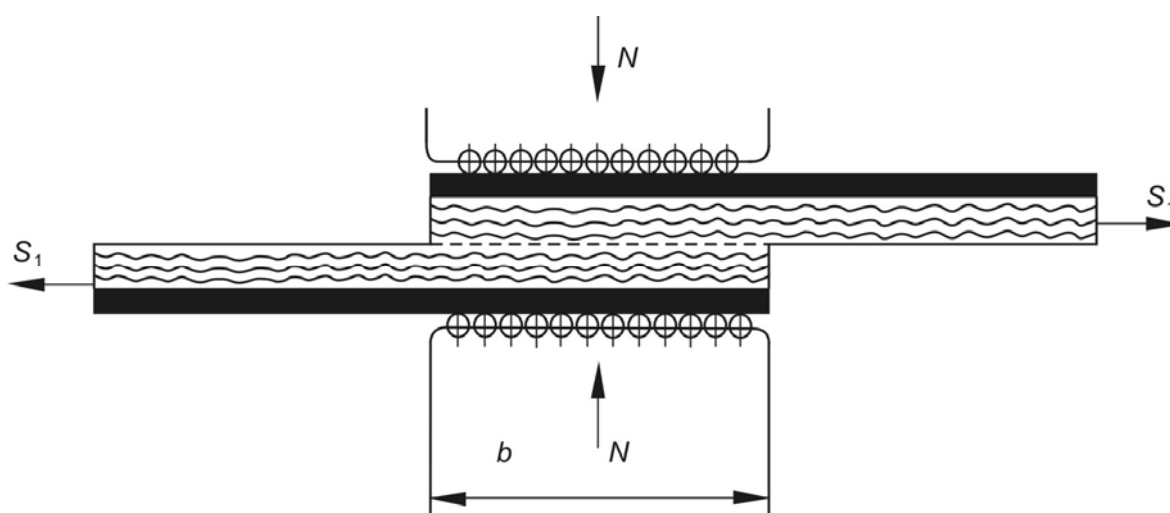


Рис. 7.3.11. Схема нагружения фигурных образцов

Для определения исходного предела прочности a_0 были подвергнуты испытаниям под действием статического нагружения восемь образцов ленты ТА-300/8, что дало среднее значение $m_{a_0} = 0,92$ и стандартное отклонение $s_{a_0} = 0,05$ предела прочности на сдвиг. Затем другие образцы этой же ленты были подвергнуты циклическому деформированию с амплитудами $\gamma = 0,154; 0,131; 0,107$. Для каждой из этих амплитуд γ после наработки некоторого числа циклов n_1 знакопеременного сдвига разрушалось по четыре образца под действием статического нагружения. Таким же способом четыре других образца в каждом эксперименте нагружались амплитудой γ по n_2 и n_3 циклов соответственно, $n_3 > n_2 > n_1$. Среднее значение предела прочности $\alpha(\gamma, n)$ представлено в четвертой колонке табл. 7.3.2. Во второй и третьей колонках отражены средние значения ресурса и числа циклов прецик-

лирования. Предел прочности образцов, полученный после циклического нагружения с амплитудой $\gamma = 0,154$, показан на рис. 7.3.12.

Таблица 7.3.2

Предел прочности образцов в зависимости от нагрузки и угла сдвига

γ	$N(\gamma)$	n	$\alpha(\gamma, n)$	$k(\gamma)$
0,154	38000	10000	0,91	3,22
		14000	0,87	
		22000	0,78	
0,131	61600	24000	0,89	3,55
		30000	0,87	
		36000	0,83	
0,107	124000	60000	0,86	3,8
		70000	0,86	

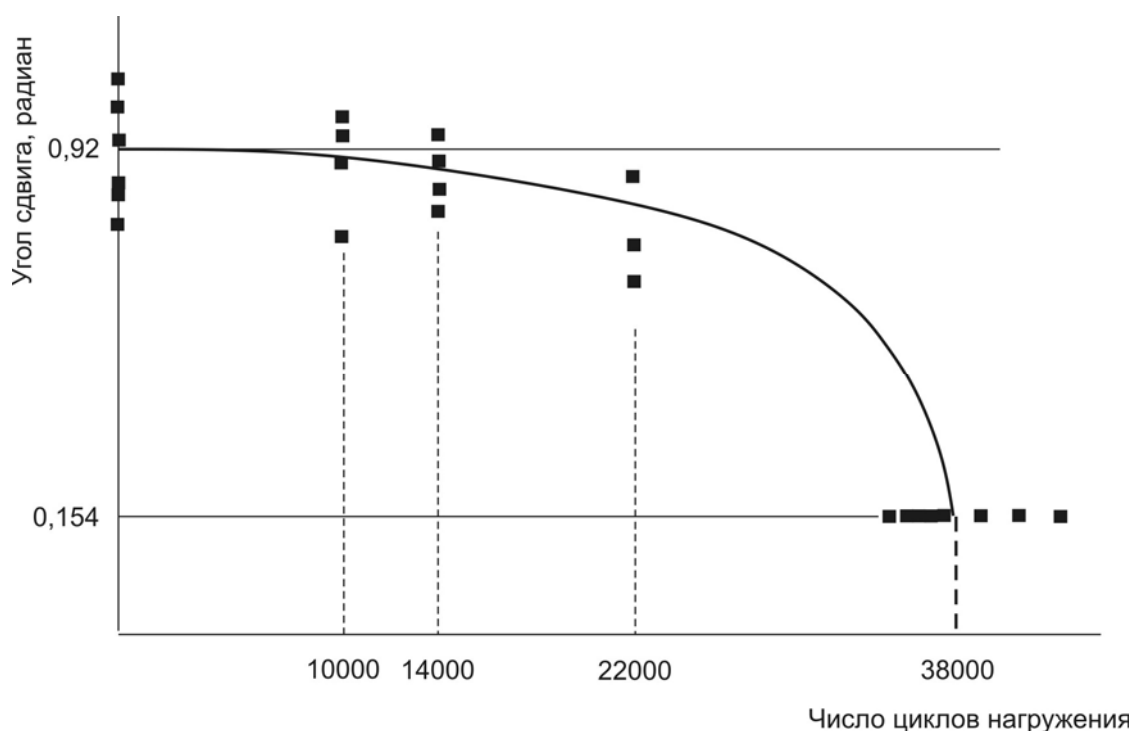


Рис. 7.3.12. Ресурс при регулярном нагружении и изменение предела прочности после прециклирования

При построении кривых ФСУ посредством уравнения (7.3.1) для каждого выбранного уровня сдвигового нагружения было разрушено $8 + 4 + 4 + 4 + 8$ образцов: 8 – для определения исходного предела прочности, по 4 – в каждом из трех испытаний с циклическим сдвигом и 8 – при обычных

усталостных испытаниях. Сейчас можно утверждать, что уменьшение сдвигового сопротивления существует в действительности, и может быть принята гипотеза 1 (см. п. 7.3.1). Ленты другого типа показали при испытаниях такое же поведение, но результаты здесь не описываются вследствие малочисленности испытаний.

Чтобы завершить описание ФСУ как детерминированных функций, помимо квантильных значений долговечности, определяемых по уравнению (7.3.3), найдем коэффициент $k(\gamma)$. Используем для этого полученные значения математического ожидания пределов прочности для каждого тестового нагружения и значение долговечности $N(\gamma)$. $k(\gamma)$ может быть оценен квадратической функцией:

$$k(\gamma) = 3,74 + 9,49\gamma + 83,6\gamma^2.$$

Соответствующие численные значения приведены в пятой колонке табл. 7.3.2.

Двухуровневые усталостные испытания. С целью проверки правомерности использования ФСУ для определения долговечности образцов при нестационарном нагружении были выполнены испытания на двух уровнях амплитуд сдвига.

Легко увидеть, что в нашем случае, когда $k(\gamma) > 1$, имеют силу следующие неравенства для усталостной долговечности, вычисленные по ФСУ N_F и по линейному правилу N_L :

1) если $\gamma_1 > \gamma_2$, тогда $N_F < N_L$;

2) если $\gamma_1 < \gamma_2$, тогда $N_F > N_L$,

где γ_1, γ_2 – амплитуды первой и второй части циклического нагружения.

Сначала шесть образцов ленты ТА-300/8 циклировались на брекерной машине с амплитудой $\gamma_1 = 0,154$ в течение 3×10^4 циклов, а затем при амплитуде $\gamma_2 = 0,107$ доводились до разрушения в течение $n_2 = N_T - n_1$ циклов, где N_T – суммарное значение общей долговечности образца, полученное в данном двухуровневом испытании. Следующая группа из шести образцов испытывалась в обратном порядке: сначала циклирование производилось на амплитуде $\gamma_2 = 0,107$ в течение $n_2 = 8 \times 10^4$ циклов, а затем при амплитуде $\gamma_1 = 0,154$ образцы доводились до расслоения.

На рис. 7.3.13 дано графическое представление классической гипотезы линейного накопления повреждений для случая двухступенчатого нагружения. Эта зависимость отображается отрезком прямой линии, связы-

вающим точки на осях координат, соответствующие $n_1/N_1 = 1$ и $n_2/N_2 = 1$. Кривые линии на рис. 7.3.13 построены при помощи уравнения (7.3.6). Экспериментальные точки, полученные при двухуровневых испытаниях, показаны на этом же рисунке.

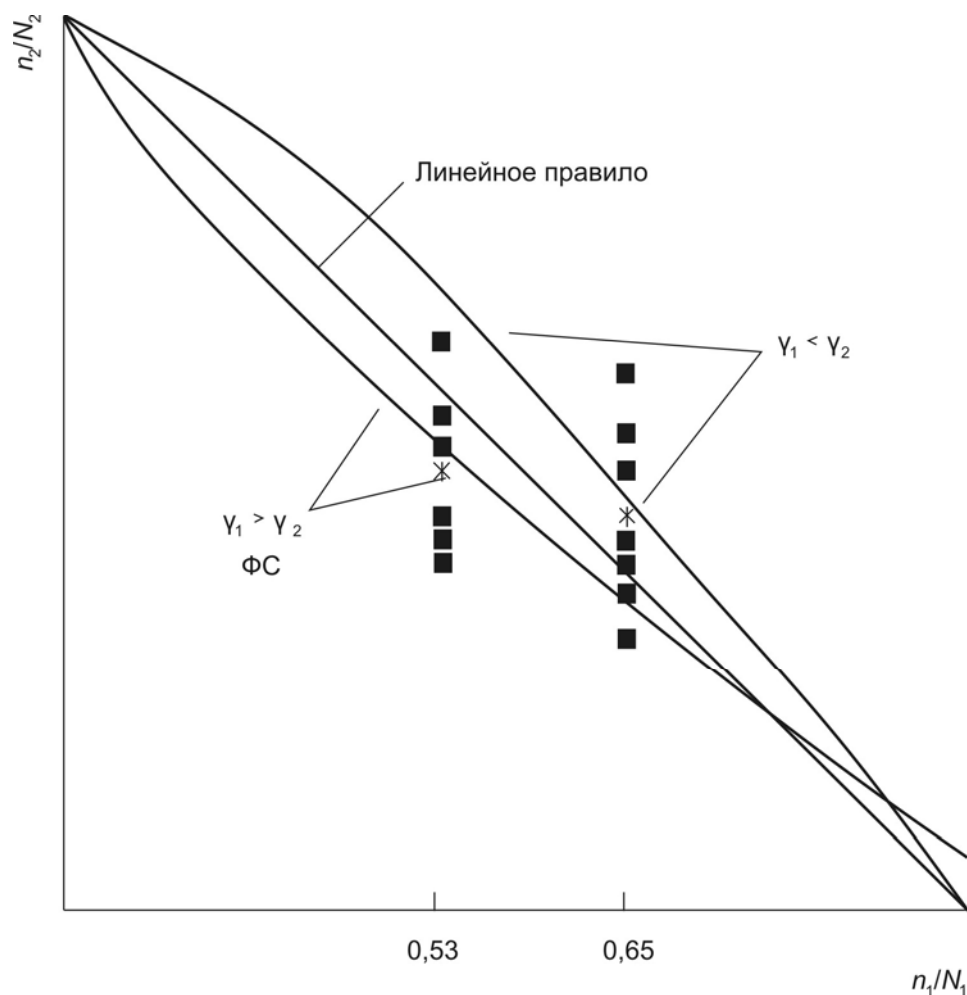


Рис. 7.3.13. Накопление повреждений при двухуровневом нагружении

Предложенный метод оценки состояния образца и предсказания долговечности фабричной конвейерной ленты при помощи использования ФСУ тесно связан с хорошо известной гипотезой накопления повреждений Гаттса, разработанной для металлов, предусматривающей непрерывное изменение предела выносливости и прочности. Здесь мы попытались опробовать гипотезы, в которых предел прочности на сдвиг резиноканевой конвейерной ленты может быть промоделирован при помощи степенной функции числа приложенных циклов напряжения. Рис. 7.3.13 показывает, что это моделирование вполне возможно. Более того, применимы гипотезы существования ФСУ и эквивалентности состояний для описания усталостного поведения конвейерной лен-

ты при сдвиговых нагружениях. Расхождение с гипотезами (в частности, эксцесс точек сопротивления после прециклирования над некоторыми точками начального сопротивления) может быть объяснено детерминистическим характером метода предсказания и случайными усталостными свойствами образцов. Из рис. 7.3.13 видно, что в среднем отклонение точек, полученных при испытаниях, от точек, вычисленных ФСУ, меньше, чем в случае с линейным правилом накопления повреждений; эти отклонения не выглядят значительными. Данный факт может быть объяснен тем, что в целом линейное правило не так уж плохо для предсказания усталостной долговечности при многоуровневом нагружении.

Необходимо принять во внимание, что известны случаи, когда при использовании метода ФСУ для сталей и сплавов сопротивление материалов может увеличиваться после прециклирования, как следствие – правило эквивалентности (7.3.4) не выполняется, а прогнозирование усталостной долговечности по предложенному методу неверно. В этом случае рекомендуется проводить специальные испытания с циклическим нагружением и статическим разрушением.

Таким образом, построена детерминированная модель накопления усталостных повреждений в конвейерных лентах при сдвиговых деформациях. Введение стохастической надстройки можно произвести аналогично построению индивидуальных кривых усталости. Это даст нам новую концепцию прогнозирования ресурса по индивидуальным функциям сопротивления усталости. Построение производится так же, как и в случае линейной модели накопления повреждений. Переход от детерминированной модели к стохастической подробно рассматривался в гл. 4 и 5. В данном случае потребуется рандомизация уравнения (7.3.3). Результаты моделирования распределений ресурса по этому методу представлены в п. 6.3 при демонстрации возможностей алгебраических автоматов.

7.3.4. Моделирование закона распределения

Стохастический характер грузопотока приводит к случайному нагружению ленты в загрузочном пролете, позволяющем имитировать процесс нагружения по методу Монте-Карло. Наибольшая нагруженность приходится на центральную часть ленты, поэтому ее отказ по фактору усталостного расслоения сердечника рассмотрим для плоскости ленты единичной ширины вдоль оси конвейера, которая и определяет долговечность всей ленты.

Для этого выполним стохастическое моделирование и прогнозирование ресурса в любом сечении ленты, обращаемой в контуре конвейера.

В продольном направлении ленту можно рассматривать как набор элементов единичной ширины (см. рис. 7.3.1). Блоки нагружения также указаны на рис. 7.3.1 при обращении ленты, которую мы считаем набором образцов из одной генеральной совокупности, что позволяет воспользоваться концепцией слабейшего звена, когда отказ происходит по фактору расслоения ленты в наименее прочной по сопротивлению усталости резиновой прослойке. После определения функции распределения долговечности произвольно выбранного из генеральной совокупности образца расчет долговечности всей ленты в дальнейшем выполним согласно теории экстремальных распределений [49].

При работе конвейера с постоянной производительностью уровни нагружений сердечника ленты сдвиговыми деформациями при прохождении линейной части трассы $\gamma_2\gamma_4$ и при огибании барабанов γ_4 можно считать детерминированными величинами, функционально связанными с упругими характеристиками ленты, ее натяжением, а также конструктивными параметрами конвейера.

Что же касается сдвиговых нагрузок (деформации) γ_1 , обусловленных динамическим воздействием кусков перегружаемого материала в загрузочном пролете конвейера, то они имеют случайный характер, определяемый статистическими характеристиками грузопотока. Предложено считать распределение входного случайного воздействия нормальным с коэффициентами вариации $\nu_1 = 0,2$ для мелкокусового и $\nu_2 = 0,8$ для крупнокусового материала.

Представим сочетание ступеней с различными уровнями сдвиговых деформаций в виде блока нагружения (см. рис. 7.3.1). При воздействии каждого блока нагружения за один оборот ленты в контуре конвейера происходит снижение ее усталостной прочности по семейству функций сопротивления, определяемому случайной величиной ξ . Зададим некоторое значение ξ и, рандомизируя на каждом обороте значение нагрузки γ_1 по нормальному закону распределения, получим некоторое число циклов нагружения данного образца ленты до расслоения. Повторяя эту процедуру моделирования с другими свойствами (новое значение ξ), получим следующие значения ресурса. При многократном повторении процедуры рандомизации по методу Монте-Карло получится выборка значений долговечности для некоторого образца исследуемого типа ленты при заданном блоке нагружения.

Результаты компьютерного моделирования, проведенного на основании теории алгебраических автоматов, обсуждались в гл. 6. На графиках рис. 7.3.14 приведены значения средней долговечности элемента ленты единичной длины, задействованного на конвейерах различной протяженности. По оси абсцисс отложены величины масс падающего груза и соответствующие им сдвиговые деформации γ_1 , возникающие в сквиджах в точке локального нагружения ленты. Величина сдвиговых деформаций сквиджей при прохождении роlikоопор γ_2 принята равной 0,016 или 0,02. Рассмотрены конвейеры, имеющие протяженность между головными и концевым барабанами 60, 120, 240 м, при этом скорость движения ленты принята равной $V = 2,5$ м/с. Длина конвейера существенно изменяет блок нагружения ленты в течение одного периода обращения ее в контуре конвейера.

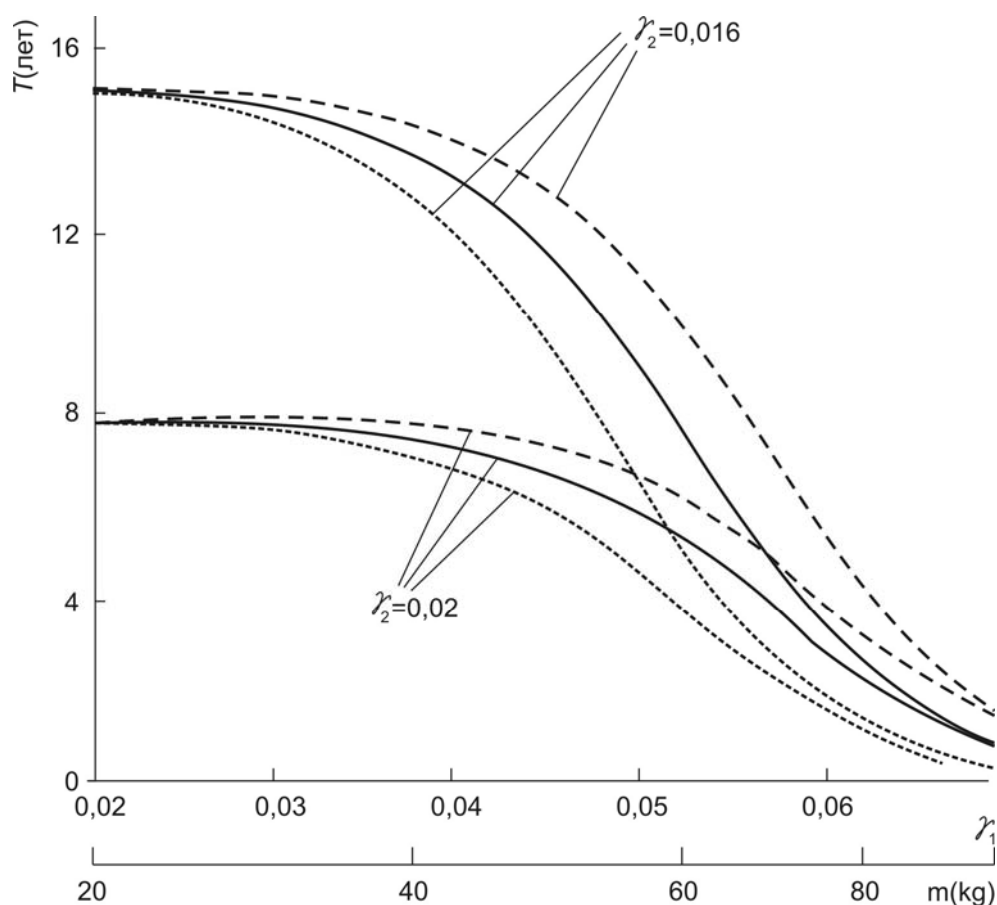


Рис. 7.3.14. Средний срок службы элемента (образца) конвейерной ленты МК 400/120:

..... — 60 м, ---- — 120 м, — — — — 240 м

Для каждого из γ_2 при малых значениях γ_1 долговечность ленты практически не зависит от длины конвейера и все три кривые выходят из одной точки. В дальнейшем, с ростом значений γ_1 , срок службы ленты конвейеров меньшей длины сокращается. Обратим внимание, что при $m = 100$ кг для конвейеров одинаковой длины срок службы ленты становится практически независимым от значения γ_2 .

Рассмотренный способ нахождения распределений долговечности элементов ленты единичной длины может быть использован для определения срока службы всей ленты также с помощью упомянутой выше теории экстремальных распределений.

Распределение ресурса элементов ленты единичной длины $P(T < y) = F(t)$ представим логнормальным законом.

Поскольку вся лента состоит из множества элементов единичной длины, то значение ее ресурса может быть определено как минимальное значение ресурса всех составляющих ее n элементов единичной длины: $T = \min(T_1, T_2, \dots, T_n)$. При $n \rightarrow \infty$ распределение ресурса всей ленты длиной $l = 2L$ запишем в виде

$$F_1(t) = F[a_1(t - b_1)], \quad (7.3.10)$$

при этом наблюдается соответствие параметров элемента единичной длины a, b и полноразмерной ленты a_1, b_1 :

$$a_1 = a, b_1 = b - a^{-1} \ln l.$$

При достаточно больших n получаем область притяжения для логнормального распределения первого типа [49]. Это означает, что формула (7.3.10) преобразуется к двойному экспоненциальному распределению

$$F_1(t) = 1 - \exp \left\{ -e^{[a(t - b + a^{-1} \ln l)]} \right\}.$$

Математическое ожидание ресурса элемента единичной длины m_T и стандартное отклонение S_T выражаются через a и b как $m_T = b - \lambda/a$ и $S_T = \pi\sqrt{6/a}$, где λ – постоянная Эйлера. Для полноразмерной ленты длиной l математическое ожидание m_{T_1} и стандарт S_{T_1} равны

$$m_{T_1} = b - a^{-1}(\lambda + \ln l), S_{T_1} = a^{-1}\pi\sqrt{6}.$$

На рис. 7.3.15 приведены зависимости ресурса $T(\gamma_2)$ для всей ленты и для элемента единичной длины при двух длинах конвейера $L = 120$

и 240 м и двух уровнях γ_2 , равных 0,016 и 0,02. Отчетливо видно, что средние долговечности всей ленты меньше, чем для элемента единичной длины; с увеличением нагруженности различие в долговечностях сокращается. Показанные на рис. 7.3.16 кривые плотности распределения ресурса всей ленты смещены влево по отношению к кривым плотности распределения элементов единичной длины.

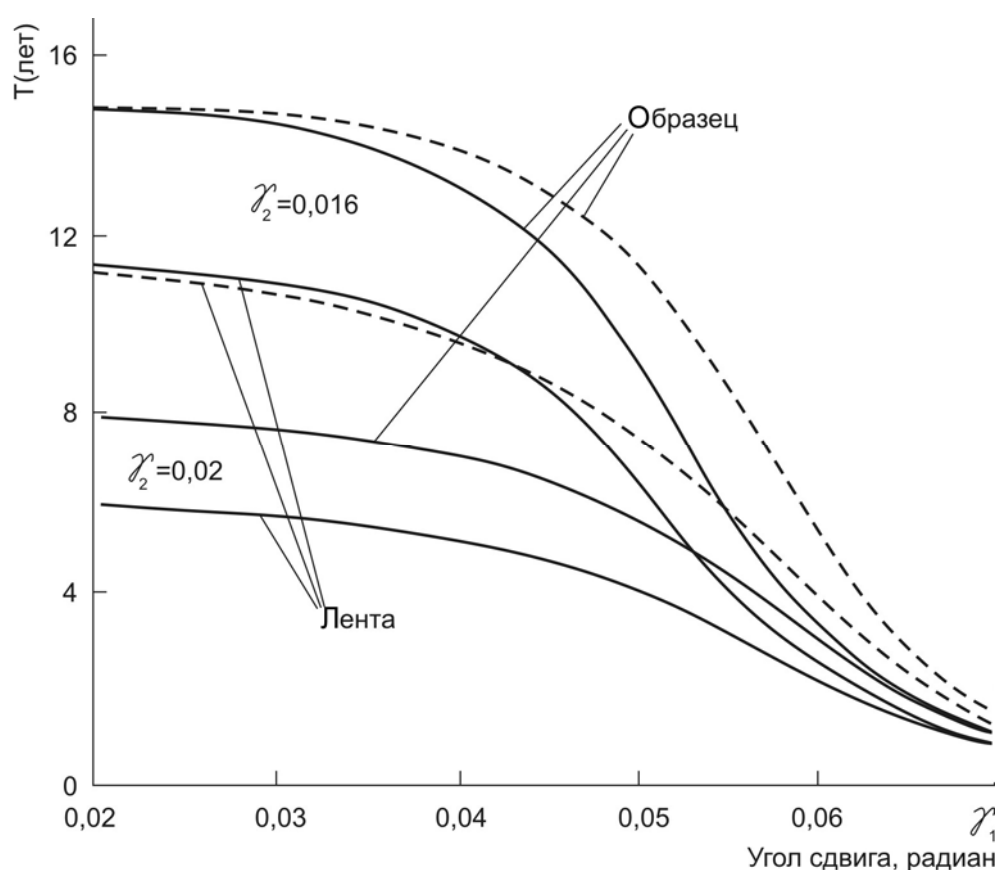


Рис. 7.3.15. Средний срок службы полноразмерной конвейерной ленты МК 400/120: – 60 м, — — — — 120 м, — — — — 240 м

В заключение отметим, что приведенная в настоящей главе методика прогнозирования ресурса резиноканевых конвейерных лент на основе использования функций сопротивления усталости позволяет прогнозировать ресурс лент различных типов, при этом последовательность внешних воздействий, т. е. блок нагружения ленты, определяется эксплуатационными режимами. Приведенные характеристики усталости являются, по сути, паспортом для идентификации усталостных свойств рассматриваемых лент и решения задач прогнозирования по индивидуальным характеристикам усталости.

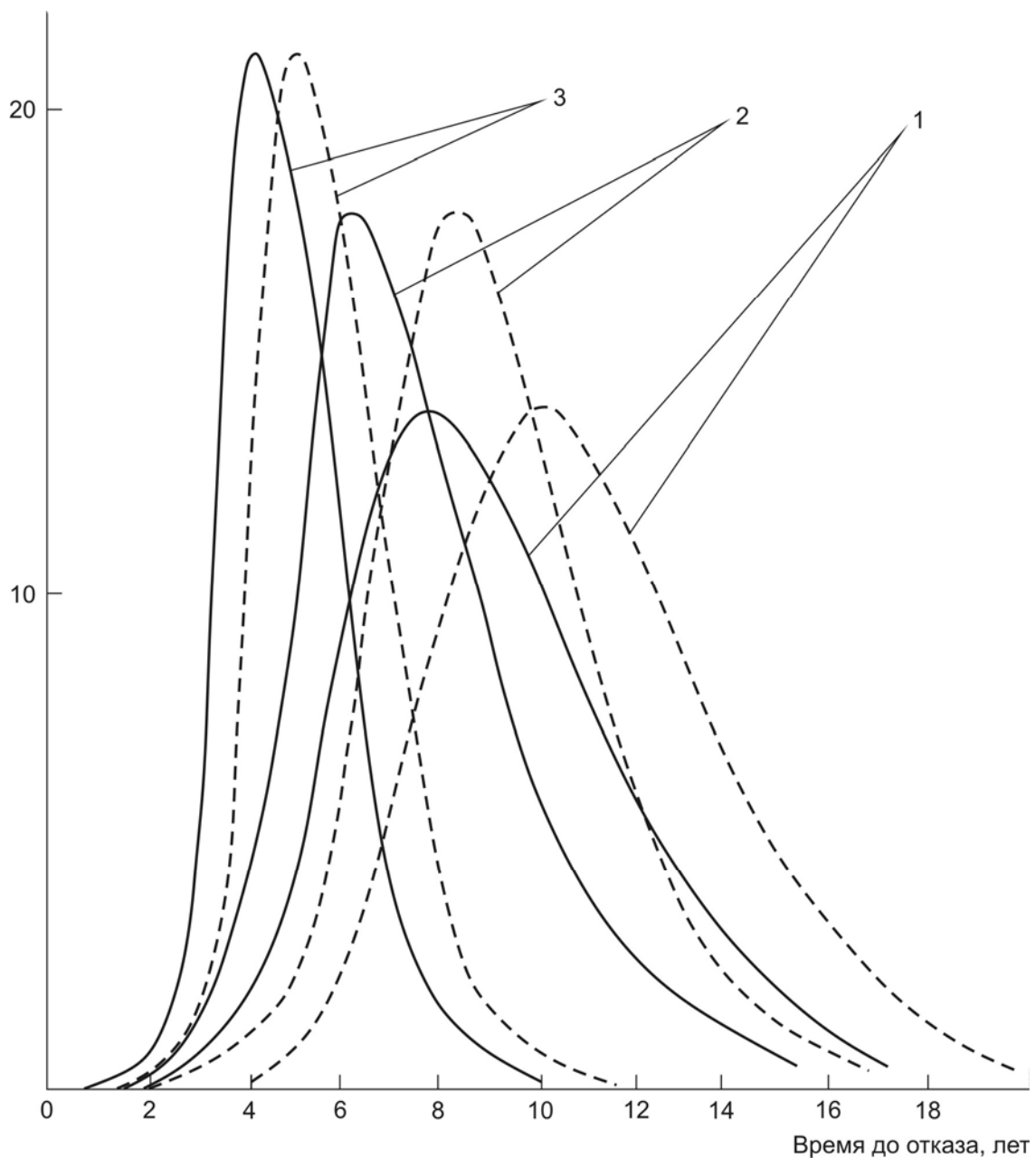


Рис. 7.3.16. Плотности распределения ресурса конвейерной ленты МК 400/120: 1 – 60 м, 2 – 120 м, 3 – 240 м

7.4. Оптимизация начальной высоты печатающих элементов узлов для поперечного линования тетрадных агрегатов

Отечественное оборудование, применяемое для производства тетрадей, можно условно разделить на два типа: полуавтоматические линии, совмещающие в производственном процессе все операции и позволяющие

получать готовый продукт для последующей упаковки и транспортировки на склад (типа ПВТ-84), и оборудование, выполняющее отдельные операции, но свободно комплектуемое в потоках для изготовления продукции (типа ЛТ-2, ЛТА).

Рост производительности основных технологических процессов за счет повышения мощности оборудования и скорости осуществления операций означает повышение шумовой обстановки в цехах по производству тетрадей. Воздействие больших уровней шума приводит к быстрому утомлению людей – операторов этих линий, повышается число различных ошибок операторов в результате снижения эмоциональных реакций, способности оперативного принятия решений и, кроме того, увеличивается время, требуемое на отдых в течение производственной смены. Основные издержки производства являются следствием:

1) ошибок операторов, что приводит к простоему оборудования, во время которого эти ошибки устраняются;

2) простоя на время «перекуров» (время простоя из-за отказов оборудования на порядок меньше, поскольку практически все обслуживание производится между сменами);

3) выпуска бракованной продукции из-за неправильных действий операторов.

Проведенные на Свердловской фабрике беловых, канцелярских и картонных изделий исследования показали, что уровень шума в цехах достигает 96–98 дБА, что значительно превышает допустимые по ГОСТ 12.1.003–83 нормы. Натурные исследования позволили определить, что основным источником шума являются узды для поперечного линования бумаги. Излучение происходит в результате замыкания объемов воздуха между печатающими элементами линовального валика и бумаговедущим барабаном. При контакте между двумя соседними печатающими элементами из-за их деформации создается избыточное давление, которое при дальнейшем вращении валов порождает звук. Естественно, что при снижении высоты печатающих элементов будет уменьшаться звуковая энергия источника. Поэтому наиболее реальным методом снижения шума в производственных условиях, по крайней мере до уровня, рекомендованного ГОСТом, является уменьшение высоты печатающих элементов.

При эксплуатации валиков происходит изменение высоты их печатающих элементов в результате изнашивания. Когда толщина наносимых линий достигает критической величины $l = 1$ мм, валик снимают с эксплу-

атации и отправляют на перешлифовку и (или) обрезаживание. Изменение высоты печатающего элемента схематично изображено на рис. 7.4.1, где h_0 – начальная высота элемента, затем происходит снижение высоты до h_1 . После этого валик отправляют на перешлифовку, в результате которой высота элемента h_1 практически не меняется. Затем валик эксплуатируют до высоты элемента h_2 и отправляют на обрезаживание. Ширина основания печатающего элемента a постоянна и равна 5 мм.

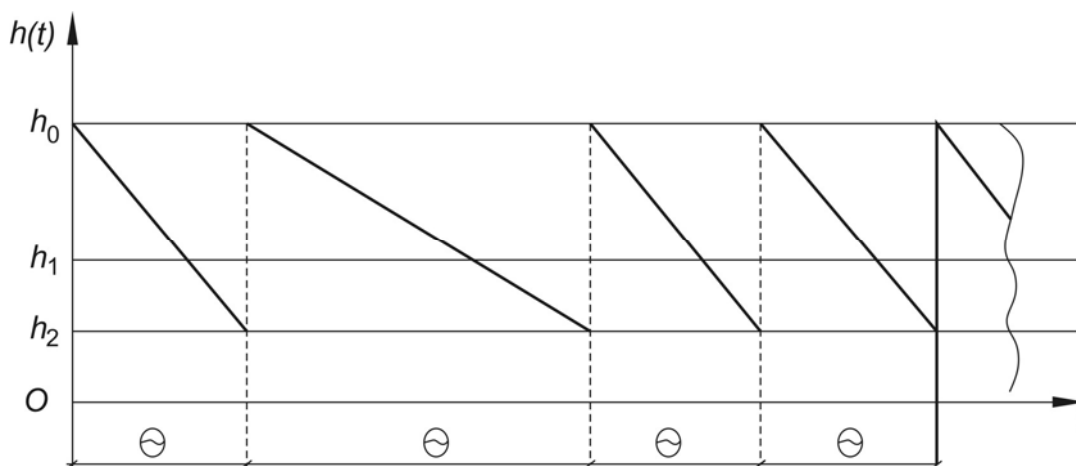


Рис. 7.4.1. Схема изменения высоты печатающих элементов во времени

Чтобы снизить шум, необходимо уменьшить начальную высоту печатающих элементов, но это повлечет за собой более частую их замену, а значит, и большие производственные издержки. Таким образом, возникает оптимизационная задача определения начальной высоты печатающих элементов с учетом потерь как от шума, так и от количества замен валиков.

Имеющиеся по 36 валикам данные показывают, что время их эксплуатации до снятия на обслуживание находится в пределах от 3 до 21,5 недели при среднем значении в 15,3 недели (нед.). Время замены валиков тетрадных агрегатов невелико, замена осуществляется в непроизводственное время, поэтому в рамках рассматриваемой задачи можно считать, что замена производится мгновенно, т. е. будем учитывать по оси времени на рис. 7.4.1 только производственное время.

Изложенные соображения позволяют поставить задачу вероятностной оптимизации начальной высоты печатающих элементов узлов для поперечного линования тетрадных агрегатов и решить ее с помощью методов, изложенных в гл. 3. Отметим, что общая задача, рассматривавшаяся там, в данном случае вырождается в задачу поиска одного верхнего оптимального уровня.

Поскольку нет никаких данных о законе изменения высоты печатающих элементов валиков в процессе эксплуатации, а есть лишь статистика времени снятия валиков с эксплуатации и экономически нецелесообразно ставить систему автоматизированного контроля процесса изнашивания на каждый валик, то в первом приближении при постоянной скорости вращения валиков опишем случайный процесс $h(t)$ изменения высоты печатающих элементов веерным процессом

$$h(t) = h_0 - \alpha t, \quad (7.4.1)$$

где α – скорость износа, зависящая от материала валика.

Такой способ описания процесса износа при постоянных условиях эксплуатации неоднократно использовался многими авторами [48]. Для наугад взятого валика скорость изнашивания есть реализация случайной величины, т. е. рассматривается «врожденная» модель отказов. При отсутствии необходимых данных линейная аппроксимация законов изнашивания не хуже, чем любая другая.

Поскольку l – детерминированная величина, то при постоянном значении величины основания a печатающего элемента высоты h_1 и h_2 есть детерминированные функции от h_0 , где $h_0 \in [h_i, h_s]$. Из технологических соображений нижняя и верхняя границы высоты печатающего элемента принимаются $h_i = 3$ мм, а $h_s = 10$ мм. Определим функции h_1 и h_2 как

$$h_1 = \begin{cases} f(h_0), f(h_0) \geq h_i \\ h_i, f(h_0) < h_i \end{cases},$$

$$h_2 = \begin{cases} f(h_0), g(h_0) \geq h_i \\ h_i, g(h_0) < h_i, f(h_0) \geq h_i \\ 0, g(h_0) < h_i, f(h_0) < h_i \end{cases},$$

где $f(h_0) = h_0(1 - \frac{l}{a})$, $g(h_0) = h_0(1 - \frac{l}{a})^2$.

Функционал качества при эксплуатации такого элемента механической системы (ЭМС) определим стационарной интенсивностью издержек $s(h_0)$, где $h_0 \in [h_i, h_s]$. Обозначим: C – стоимость замены валика, D – стоимость перешлифовки, $\chi(h_2) = \begin{cases} 1, h_2 > 0 \\ 0, h_2 = 0 \end{cases}$, $Q(\theta)$ – потери от шума на одном

цикле регенерации θ .

За моменты регенерации естественно принять моменты замены валиков.

В таком случае запишем стационарную интенсивность издержек в виде

$$s(h_0) = [C + D\chi(h_2) + EQ(\theta)] / E\theta. \quad (7.4.2)$$

Известно, что средние потери $b(h)$ от шума, связанные со снижением производительности труда людей, обслуживающих тетрадные агрегаты, как функция высоты печатающих элементов составляют

$$b(h) = \psi(v) \lg h,$$

где $\psi(v)$ – функция интенсивности затрат от скорости v движения бумаги.

Например, при скорости $v = 100$ м/мин $\psi(v) = 28,18$ у.е./нед. Поскольку процесс изнашивания представлен в виде (7.4.1), то для математического ожидания длительности цикла регенерации $E\theta$ справедливо равенство

$$E\theta = (h_0 - h_1) \cdot \varepsilon, \text{ где } \varepsilon = E(1/a). \quad (7.4.3)$$

Чтобы найти $s(h_0)$, необходимо вычислить интеграл

$$EQ(\theta) = E \int_0^{\theta} b(h(t)) dt.$$

В силу равенств (7.4.2–7.4.3)

$$EQ(\theta) = A \cdot \varepsilon [h_0 \ln h_0 - (h_0 - h_2) \ln (h_0 - h_2) - h_2],$$

при этом $A = 12,24$ у.е., $\varepsilon = 8,5$ нед./мм.

Окончательно получаем оценку стоимости эксплуатации ЭМС как функцию параметра h_0 :

$$s(h_0) = \begin{cases} A\varphi(h_0) + \frac{C}{\varepsilon(h_0 - h_i)}, & 3,00 \leq h_0 < 3,75 \\ A\varphi(h_0) + \frac{C + D}{\varepsilon(h_0 - h_i)}, & 3,75 \leq h_0 < 4,70, \\ A\varphi(h_0) + \frac{C}{\varepsilon(h_0 - \eta)}, & 4,70 \leq h_0 < 10,00 \end{cases}$$

где $\varphi(h_0) = h_0 \ln h_0 - (h_0 - h_i) \ln (h_0 - h_i) - h_i$, $C = 78$ у.е., $D = 8$ у.е., $\eta = 0,64$.

В результате компьютерного моделирования получаем график зависимости издержек на эксплуатацию линовального валика с учетом стоимости его

обработки и потерь от повышенного шума (рис. 7.4.2). Как видно из графика, минимальная величина издержек получается при высоте печатающих элементов 3,25 мм и величине издержек 98 у.е./нед. При используемой в настоящее время высоте величина издержек составляет 200 у.е./нед., если каждый тетрадный агрегат обслуживают 4 человека. Таким образом, при снижении высоты печатающих элементов до оптимальной издержки на эксплуатацию снизятся на 102 у.е./нед., а уровень шума – на 6 дБА. На рис. 7.4.2 видно, что на отрезке от 3,3 до 10 мм возможного изменения высоты печатающих элементов функция интенсивности издержек является монотонно возрастающей. Последнее показывает, насколько велики потенциальные потери от шума по сравнению с потерями от увеличения частоты замены валиков и их перешлифовок. Дополнительно приведем график зависимости издержек от высоты печатающих элементов для линии ПВТ-84, обслуживаемой тремя операторами (рис. 7.4.3). Видно, что для данного случая оптимальное значение высоты сместилось к 3,75 мм. Если же будет организовано безлюдное производство, то эта величина может быть еще увеличена.

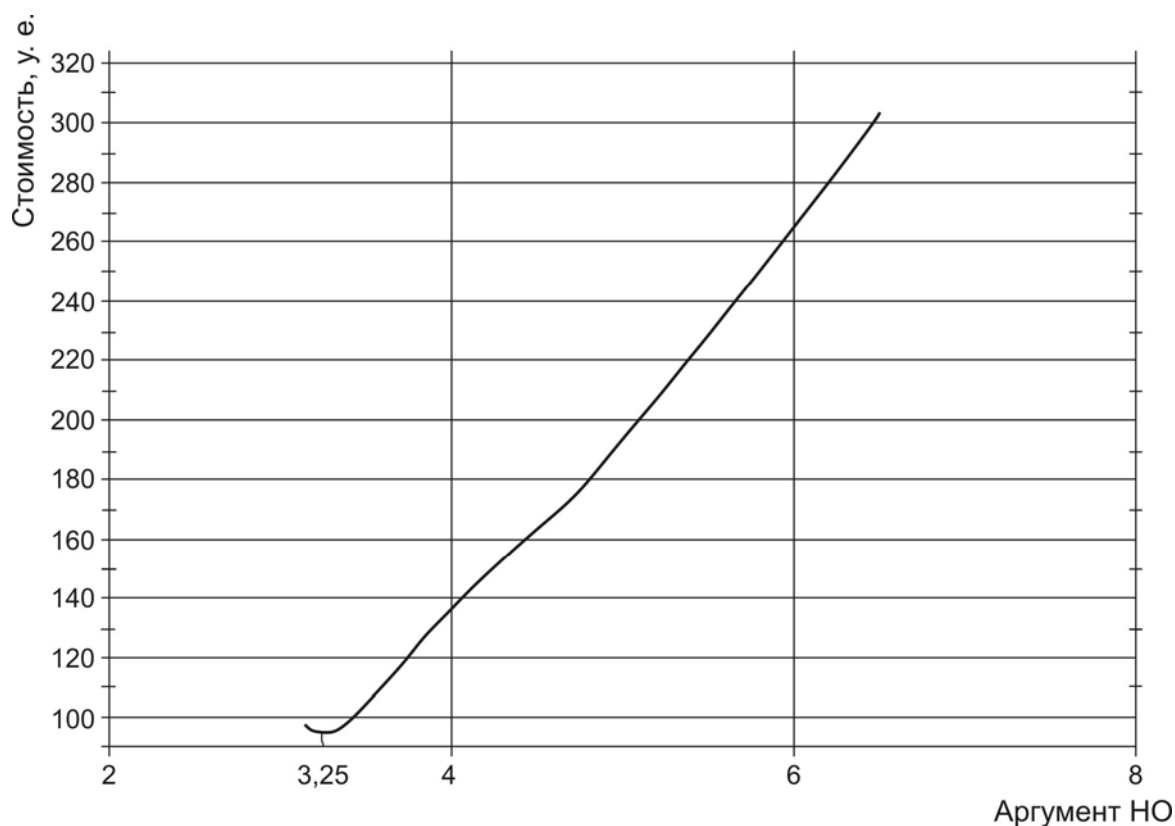


Рис. 7.4.2. График изменения интенсивности издержек в зависимости от начальной высоты печатающего элемента для линий ЛТА

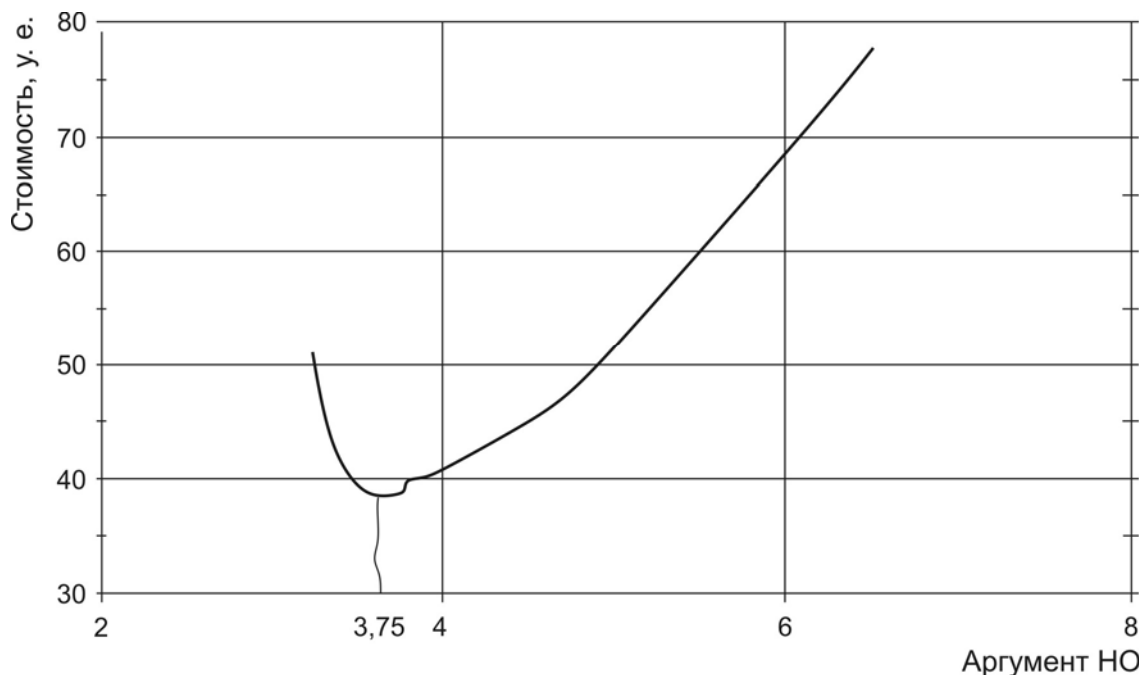


Рис. 7.4.3. График изменения интенсивности издержек в зависимости от начальной высоты печатающего элемента для линий ПВТ-84

7.5. Простая байесовская процедура последовательной оценки плотности распределения длин трещин

Рассмотрим на примере измерения длин трещин последовательную процедуру оценки плотности распределения. Предположим, что у нас есть некоторый эксперимент, который позволяет проводить измерение длин трещин в некотором ЭМС. Необходимо постоянно следить за этими трещинами и построить максимально правдоподобное распределение их длин по мере поступления данных.

7.5.1. Два основных вероятностных пространства

Рассмотрим основные вероятностные пространства.

1. Статистическая модель эксперимента, представленная пространством $(\Omega, \mathfrak{J}, P)$.

Обозначим множество всех возможных данных $\{x\}$ при некотором плане эксперимента за Ω . Данные x являются реализацией случайного эксперимента над случайной величиной X , поэтому на Ω задана сигма-алгебра \mathfrak{J} случайных событий. Пусть вероятность P принадлежит некоторому семейству вероятностных мер на множестве (Ω, \mathfrak{J}) . В рамках традиционного байесовского

подхода вероятностная мера P определяется заданием некоторого параметра θ (векторного или скалярного), т. е. $P = \{P_\theta; \theta \in \Theta\}$ является параметризованным семейством вероятностных мер, где Θ – множество возможных значений параметра θ . Мере P соответствует плотность распределения $f(x)$.

2. Вероятностное пространство (θ, \mathcal{F}, H) для параметра θ .

Будем считать параметр θ случайным, заданным на (θ, \mathcal{F}, H) , где \mathcal{F} – сигма-алгебра на θ , а H – вероятностная мера на (\mathcal{F}, H) . Мере H называют *априорной* вероятностной мерой параметра θ . Априорная мера H принадлежит некоторому семейству вероятностных мер и ей соответствует плотность $h(\theta)$.

Теорема Байеса. Введем обозначение $f(x|\theta)$ как определение правдоподобия отдельного значения параметра θ , если задано, что наблюдается $X = x$. Когда $f(x|\theta)$ рассматривается как функция x при заданном θ , то она может восприниматься как условная плотность распределения.

Между вероятностью и правдоподобием есть существенная разница: вероятностные утверждения касаются множества возможных исходов при фиксированном значении θ . В утверждениях о правдоподобии, напротив, значения исходов фиксированы и рассматриваются все возможные значения θ .

Пусть $g(x, \theta)$ – совместная плотность распределения. Для нее справедливы обычные соотношения:

$$g(x, \theta) = f(x|\theta)h(\theta) = h(\theta|x)f(x).$$

В соответствии с теоремой Байеса условная плотность для θ при $X = x$, называемая *апостериорной* плотностью распределения параметра θ , записывается в виде

$$h(\theta | X = x) = \frac{f(x|\theta)h(\theta)}{\int_{\Theta} f(x|\theta)h(\theta)d\theta} = \frac{f(x|\theta)h(\theta)}{f(x)}. \quad (7.5.1)$$

Для знаменателя в (7.5.1) справедливо

$$f(x) = \int_{\Theta} g(x, \theta)d\theta = \int_{\Theta} f(x, \theta)h(\theta)d\theta,$$

и он не содержит θ .

Символически выражение (7.5.1) записывается как

$$h(\theta | x) \propto f(x|\theta)h(\theta), \quad (7.5.2)$$

что читается следующим образом: *апостериорная плотность вероятности пропорциональна произведению правдоподобия на априорную плотность вероятности.*

Выражение (7.5.1) можно записать как

$$h(\theta | X = x) = \frac{f(x | \theta)}{\int_{\Theta} f(x | \theta) h(\theta) d\theta} h(\theta) = \frac{f(x | \theta)}{f(x)} h(\theta). \quad (7.5.3)$$

Нормирующий множитель $\frac{f(x | \theta)}{f(x)}$ при априорной плотности вероятности называется стандартизованным правдоподобием и служит для нормирования $h(\theta | x)$ так, чтобы

$$\int_{\Theta} g(\theta | x) d\theta = 1.$$

Тогда (7.5.1) читается так: *апостериорная плотность вероятности равна произведению стандартизованного правдоподобия на априорную плотность вероятности.*

В данной задаче не существует такого понятия, как корректный выбор априорной плотности $h(\theta)$. Действительный выбор $h(\theta)$ зависит от индивидуального опыта и информации, имеющейся в распоряжении статистика.

7.5.2. Выводы в случае нормального распределения

Неизвестное среднее, известная дисперсия. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – случайная выборка из нормального распределения с неизвестным средним μ и известной дисперсией σ^2 . Требуется построить байесовскую процедуру оценивания μ . Априорное распределение μ тоже задается в виде нормального:

$$h(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp\left(-\frac{(\mu - \alpha)^2}{2\beta^2}\right), \quad (7.5.4)$$

где отражено *наше мнение* о том, что μ концентрируется около значения α , а степень определенности наших убеждений характеризуется параметром β . Если β мало, то кривая распределения, отражающая наше мнение о том, что среднее значение есть α , будет крутой с острым пиком, если β велико, то кривая будет пологой, т. е. наши представления носят неопределенный характер.

Составим правдоподобие $f(x|\mu)$ как

$$\begin{aligned} f(x|\mu) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2 \right]\right), \end{aligned} \quad (7.5.5)$$

где \bar{x} – среднее по выборке.

Чтобы вывести выражение для апостериорной плотности, заметим, что

$$h(\mu|x) \propto f(x|\mu) \propto \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x} - \mu)^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2\beta}(\mu - \alpha)^2\right).$$

Следующее выражение можно разложить как

$$\frac{n}{\sigma^2}(\bar{x} - \mu)^2 + \frac{1}{\beta}(\mu - \alpha)^2 = \left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\beta}\right)\mu^2 - 2\left(\frac{n}{\sigma^2}\bar{x} + \frac{\alpha}{\beta}\right)\mu + \dots,$$

где остальные члены разложения (опущенные) не содержат μ .

Если все же провести разложение полностью, то становится ясно, что апостериорная плотность является нормальной со средним и дисперсией, соответственно,

$$\alpha^* = \left(\frac{n}{\sigma^2}\bar{x} + \frac{\alpha}{\beta}\right) / \left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\beta}\right), \quad \beta^* = \left(\frac{n}{\sigma^2}\bar{x} + \frac{\alpha}{\beta}\right). \quad (7.5.6)$$

Если априорные представления неопределенны и параметр β достаточно велик по сравнению с σ^2/n , то $\beta^* \rightarrow \sigma^2/n$, а $\alpha^* \rightarrow \bar{x}$.

Вспомним оценки максимального правдоподобия для данного случая. Правая часть (7.5.5) задает в соответствии с этими оценками функцию правдоподобия, и если мы продолжим рассуждения в этом направлении, то придем именно к оценке \bar{x} для неизвестного среднего μ , а не к (7.5.6). Поэтому, если есть выборка, то не стоит усложнять задачу: в качестве оценки лучше взять оценку максимального правдоподобия.

Данное представление выигрышнее в том плане, что используется некое априорное представление о том, каким должно быть неизвестное среднее, если в нашем распоряжении есть выборка $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Кроме того, можно получать оценки, даже если дано только одно измерение $x = (x_1)$.

Пример: последовательная процедура оценивания. Пусть есть априорное представление о длине некоторого дефекта, заданное нормальным распределением $N(500; 20)$. Соответственно, для выражения (7.5.4) имеем $\alpha = 500$, $\beta = 20^2$ и

$$h(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}20} \exp\left(-\frac{(\mu - 500)^2}{2 \cdot 20^2}\right).$$

Проводим эксперимент и, допустим, получаем выборочное значение $x_1 = 450$. Естественно считать, что это выборочное значение есть реализация случайной величины X со средним μ и стандартным отклонением $\sigma = 40$. То есть следует поменять представление о том, каким было стандартное отклонение. Первоначально стандартное отклонение, равное 20, потребовало увеличения в 2 раза, поскольку $N(500; 20)$, по-видимому, было ошибочным представлением и разумно увеличить дисперсию.

Тогда правдоподобие запишется как

$$f(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}40} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2 \cdot 40^2}\right),$$

и в соответствии с (7.5.6) получим оценки $\alpha^* = 483$, $\beta^* = 266$, $\sqrt{\beta^*} = 16,3$, или $N(483; 16,3)$. Изменение плотности распределения показано на рис. 7.5.1.

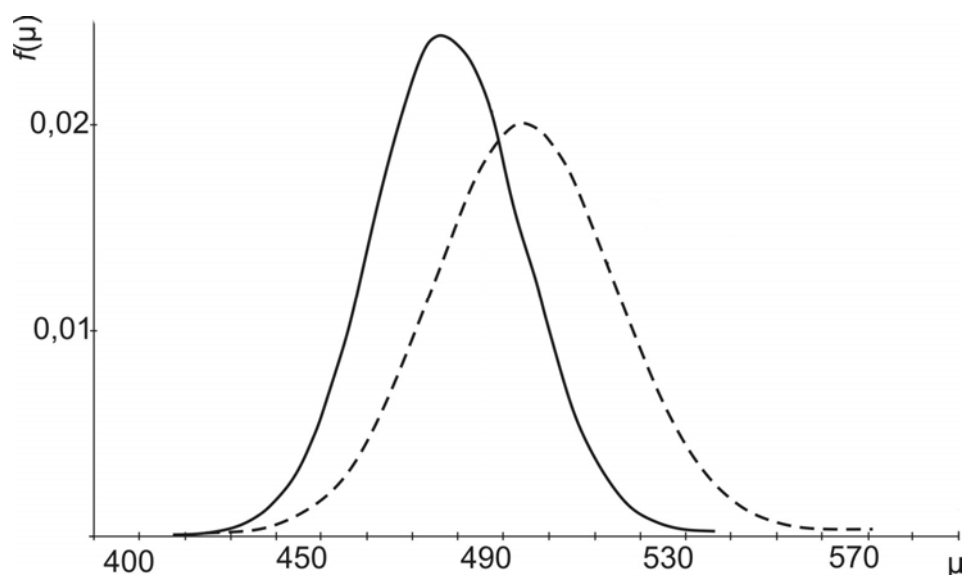


Рис. 7.5.1. Переход от априорной плотности распределения к апостериорной после получения нового выборочного значения:

—— — апостериорная; ---- — априорная

Теперь становится ясным, как производить последовательную процедуру оценивания при последовательном поступлении данных. Если по-

лучено еще одно значение x_2 , то $N(483;16,3)$ превращается в априорное распределение и вся процедура повторяется.

Неизвестное среднее, неизвестная дисперсия. Требуется оценить μ и σ^2 в случае, когда нет априорного представления об их значениях. Получить явное представление, что параметр μ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием и дисперсией, заданными как в (7.5.6), не удастся.

Если предположить, что μ и σ^2 независимы, то, последовательно применяя байесовскую процедуру, можно получить, что μ определяется из

$$\frac{\sqrt{n}(\mu - \bar{x})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)}},$$

которое имеет t -распределение Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы, а σ^2 – из

$$\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2},$$

которое имеет распределение χ^2 с $(n-1)$ степенями свободы.

7.5.3. Выводы в случае логнормального распределения

Процедура байесовского оценивания.

Шаг 1. Пусть на основании предыдущих экспериментов, где было получено 100 выборочных значений длины трещин (рис. 7.5.2), сделан вывод о том, что инспектируемые объекты (длины трещин) удовлетворяют логнормальному распределению $LN(0,2;0,3)$:

$$f(x) = \frac{\log e}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где параметры $m = 0,2$ и $\sigma = 0,3$ выражаются через математическое ожидание EX и стандартное отклонение σ_X следующим образом:

$$m = \log EX - \log\left[1 + (\sigma_X / EX)^2\right] / 2,$$

$$\sigma = \left(\log e \log\left[1 + (\sigma_X / EX)^2\right]\right)^{1/2},$$

$$\log EX = m + \sigma^2 / 2 \log e,$$

$$\sigma_X / EX = (10^{(\sigma / \log e)^2})^{1/2}.$$

Из этих формул получаем, что среднее длин трещин $EX = 2,01$, а стандартное отклонение $\sigma_x = 1,57$. Это означает, что логарифмы длин трещин распределены нормально $N(0,2;0,3)$, т. е. при среднем $m = 0,2$ и стандартном отклонении $\sigma = 0,3$ в логарифмических координатах представлены как

$$f(x) = \frac{\log e}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Результаты наблюдений приведены в табл. 7.5.1 и на рис. 7.5.2.

Таблица 7.5.1

Значения параметров

Распределение	Среднее	Стандартное отклонение
Нормальное	0,2	0,3
Логнормальное	2,01	1,57

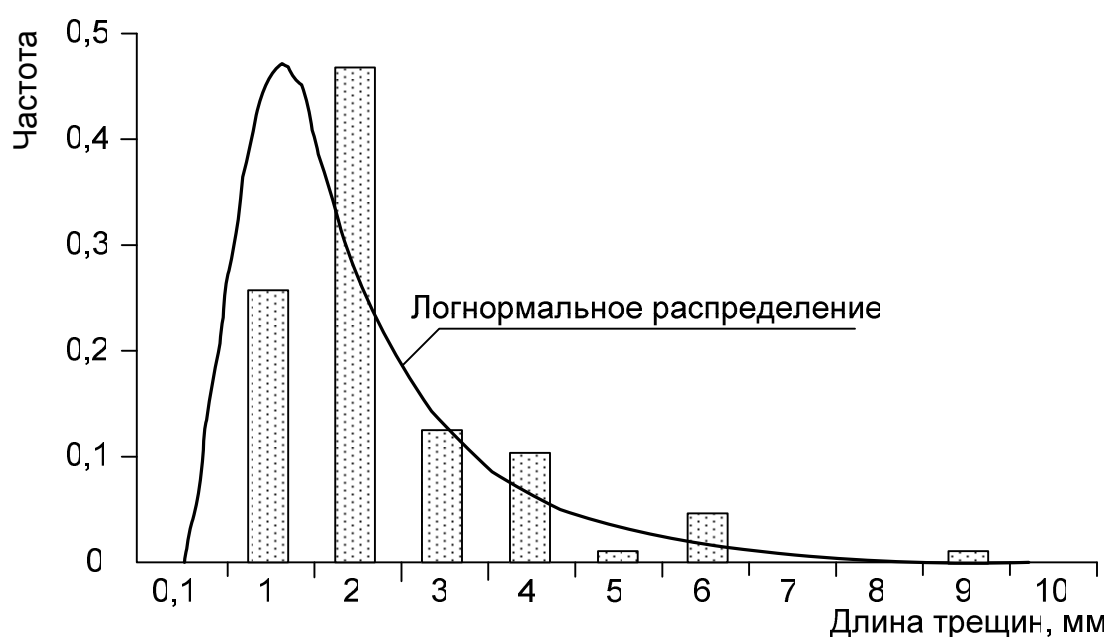


Рис. 7.5.2. Моделирование плотности логнормального распределения

Шаг 2. Пусть далее необходимо провести новые исследования на новом участке ЭМС. Введем предварительно некоторые условия: пусть среднее значение меняется, а вот стандартное отклонение остается прежним. Тогда можно воспользоваться байесовской процедурой оценивания для неизвестного среднего m и известного стандартного отклонения σ . Чтобы выполнить эту процедуру, необходимо задать некоторое априорное распределение параметра m , которое определит степень нашей уверенности

в том, что предыдущие измерения были проведены не зря и мы накопили некоторый опыт. Зададим распределение параметра m по нормальному закону $N(\alpha; \beta)$:

$$h(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta} \exp\left(-\frac{(m-\alpha)^2}{2\beta^2}\right).$$

Естественно задать это распределение как $N(0,2;0,3)$.

Шаг 3. Пусть получено три новых выборочных значения, приведенных в табл. 7.5.2.

Таблица 7.5.2

Новые выборочные значения

Способ получения	Нормальное	Логнормальное
Эксперимент 1	-0,137	0,73
Эксперимент 2	0,065	1,16
Эксперимент 3	0,512	3,25
Среднее \bar{x}	0,15	1,71
Стандартное отклонение	0,33	1,35

Составляя правдоподобие с (7.5.6), получим, что для апостериорной плотности распределения справедливо

$$h(\mu | x) \propto \exp\left(-\frac{(m-\alpha^*)^2}{2\beta^{*2}}\right),$$

т. е. апостериорное распределение будет нормальным со средним и стандартным отклонением

$$\alpha^* = \left(\frac{n}{\sigma^2} \bar{x} + \frac{\alpha}{\beta}\right) / \left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\beta}\right), \quad \beta^* = \left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\beta}\right)^{-1/2}.$$

Тогда для трех значений из эксперимента апостериорное распределение – $N(0,16;0,15)$.

Шаг 4. В качестве априорного распределения возьмем $N(0,16;0,15)$.

Проведем еще один эксперимент и получим еще одно значение $0,78 = \log(6,00)$. Апостериорное распределение – $N(0,28;0,13)$. График изменения плотности распределения по мере поступления данных приведен на рис. 7.5.3, соответствующие данные – в табл. 7.5.3.

Процедура без участия экспертов. Попробуем описать эту процедуру без участия экспертов. Обратим внимание, что правдоподобие назна-

чается до эксперимента, на основании наблюдений. В предыдущем же примере это правдоподобие назначалось после того, как статистику были сообщены новые сведения (он сам назначил параметры $N(\alpha; \beta)$).

Если перебирать все 100 точек из первоначального эксперимента, то, в конце концов, придем к $N(0,2; \beta)$, где $\beta \approx \sigma / \sqrt{100} = 0,03$.

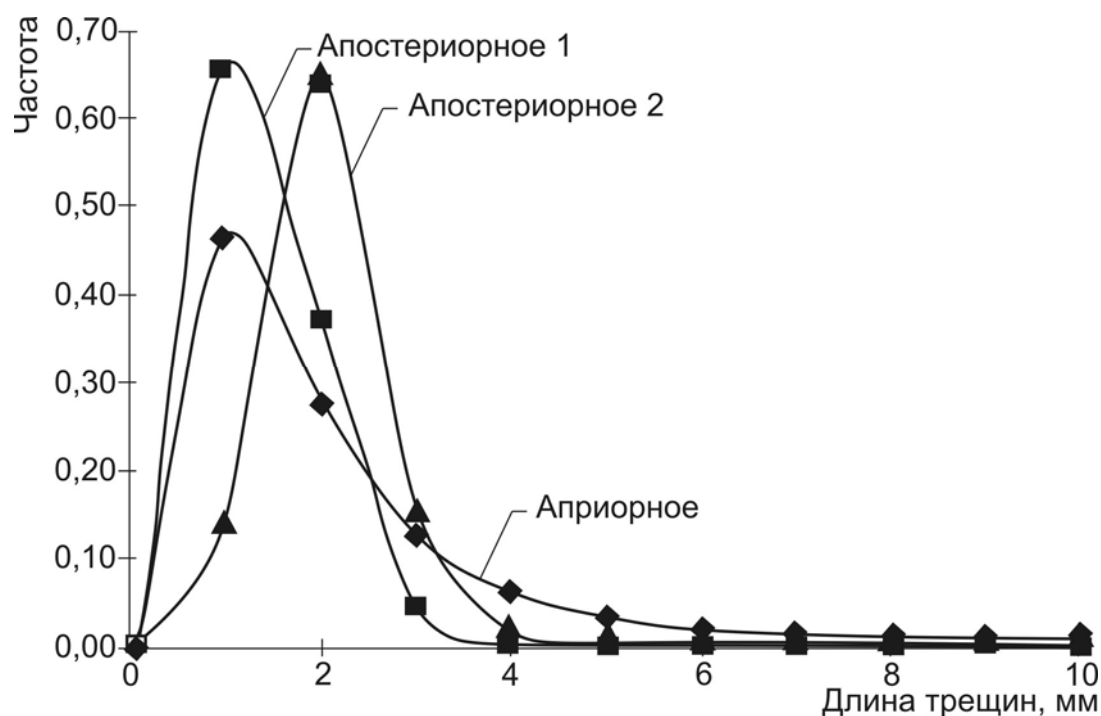


Рис. 7.5.3. Изменение плотности распределения по мере поступления новых данных

Таблица 7.5.3

Сводные данные по последовательным экспериментам

Распределение	Среднее	Стандартное отклонение	Комментарий
Нормальное	0,20	0,30	Генерируемое
Логнормальное	2,01	1,57	Генерируемое
Нормальное	0,19	0,26	Выборочное
Логнормальное	1,90	1,35	Выборочное
Нормальное	0,20	1,57	Априорное (3 значения)
Логнормальное	0,16	0,15	Апостериорное (3 значения)
Нормальное	0,16	0,15	Априорное (1 значение)
Логнормальное	0,28	0,13	Апостериорное (1 значение)

Глава 8. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДАТЧИКОВ УСТАЛОСТНОГО ПОВРЕЖДЕНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ИСТОРИИ НАГРУЖЕНИЯ

Оценка состояния элементов МС и, в частности, их силовонагруженности подразумевает использование некоторых средств технического мониторинга [45, 64]. Можно выделить три основные группы средств наблюдения за процессами деградации, отличающиеся методами и качеством получаемой информации [42]. К первой группе относятся средства наблюдения за полностью наблюдаемыми процессами (речь идет о методах визуального контроля). Например, рост наблюдаемых трещин отслеживается с помощью пластинок с поперечно нанесенными проволочками, которые рвутся по мере увеличения длины трещины. Ко второй группе относятся средства, призванные отслеживать не сам процесс деградации, а некоторый другой, доступный измерению и коррелирующий с исходным. Например, это может быть изменение омического сопротивления тензодатчиков, сигналов акустоэмиссии и др. К третьей группе относятся средства измерения внешних воздействий. В этом случае, как правило, процессы деградации ненаблюдаемы, поэтому получаемую информацию обрабатывают специальным образом для вычисления меры повреждения с применением какой-либо подходящей модели накопления повреждений. Оценка индивидуальных показателей надежности и долговечности по результатам наблюдения за состоянием элементов механических систем, находящихся в условиях накопления усталостных повреждений, – актуальная практическая задача. Для достоверного количественного прогнозирования показателей надежности требуется иметь значение характеристик нагруженности.

8.1. Описание работы датчиков усталостного повреждения

Сбор и обработка данных о нагруженности могут быть произведены средствами тензометрии с записью сигнала нагрузки по регистрирующей аппаратуре и последующей обработкой записей с использованием компьютеров. Процесс записи должен быть продолжительным. Существуют приборы, счетные устройства, которые позволяют в течение длительного времени выполнять схематизацию исследуемого процесса, считая, напри-

мер, число превышений задаваемого уровня напряжения. В настоящее время также созданы специализированные вычислительные устройства на основе микропроцессов, позволяющие длительно записывать и обрабатывать процесс нагружения. Обработка процесса может производиться как в реальном масштабе времени, так и периодически. Основным недостатком такого метода исследования на сегодняшний день являются высокая стоимость и сложность используемой аппаратуры.

В настоящее время наиболее просто массовое обследование нагруженности большого количества конструкций можно выполнить, используя простые, дешевые и надежные датчики параметрического типа – датчики усталостного повреждения. С этой целью рассмотрим возможность использования датчиков усталостного повреждения как индикаторов силонагруженности.

Обычно датчики усталостного повреждения устанавливаются (по возможности) в зоне наибольшей концентрации напряжений – чтобы процесс деформирования датчиков и конструкции был одинаковым. Предложение использовать их в качестве средства для восстановления истории нагружения имеет следующую подоплеку. В большинстве случаев у нас нет возможности произвести тарировку конструкции и датчиков одновременно, чтобы по их показаниям сразу дать оценку накопленного повреждения конструкции. Если же мы просто устанавливаем их на конструкцию, то, по крайней мере, можем отслеживать то нагружение, которое претерпевает конструкция. Это соображение может быть детализировано в рамках четырех основных проблем:

1. Датчики измеряют только историю нагружения и работают как обычные тензодатчики. В этом случае требуется подходящее правило накопления повреждений для оценки накопленного повреждения, которое бы связывало историю нагружения с накопленным повреждением.

2. Измерение процесса накопления повреждений в самих датчиках и использование знаний о предыдущих усталостных испытаниях с тем, чтобы восстановить по определенным правилам историю нагружения. Затем применяется подход, описанный выше.

3. Связь между показаниями датчиков и процессом накопления повреждений конструкцией устанавливается ранее и датчики действительно становятся датчиками усталостного повреждения.

4. Датчики показывают сразу остаточный ресурс элемента конструкции и позволяют вычислять время деградации в показаниях датчиков. В этом случае процедура пересчета «встроена» в сами датчики.

В данной главе будут рассматриваться только случай 2 и возможности его использования для элементов металлоконструкций технологических машин. Случай 1 подробно описан в предыдущих главах. 3-й и 4-й случаи значительно более сложны в части теоретической и экспериментальной отработки и отложены пока на будущее.

Существует несколько типов рассматриваемых датчиков (гальванические пленки, индикаторы с надрезом и т. д.), но наиболее перспективными являются датчики, меняющие свое электросопротивление и по виду не отличающиеся от тензодатчиков [42]. По-видимому, первенство в разработке таких датчиков принадлежит А. де Форесту [93], предложившему в 1948 г. индикатор усталости в виде проволочного элемента, меняющего свое электросопротивление при накоплении в нем усталостных повреждений.

Более совершенная конструкция подобного датчика содержит усилитель деформаций, на котором расположена кассета проволочных сопротивлений, испытывающих различные деформации в зависимости от уровня их размещения на поверхности конструкции. Благодаря такому расположению при одном и том же процессе нагружения основания датчика чувствительные элементы накапливают различное усталостное повреждение, определяемое с помощью измерения их электросопротивления, что может быть использовано для оценки накопленного повреждения самой конструкции. Дополнительно к естественной деформации чувствительных элементов может быть добавлено режущее устройство, еще сильнее повреждающее эти элементы.

Наибольшее число работ посвящено датчикам усталостных повреждений, по конструкции аналогичным электротензорезисторам. Оказалось, что изменение сопротивления тензодатчиков при знакопеременном нагружении вследствие развития в них усталостного накопления повреждений может быть использовано для оценки накопленного повреждения в элементе конструкции. Правила их установки на детали машин аналогичны правилам для обычных тензорезисторов. Принцип действия датчиков основан на измерении необратимого изменения электросопротивления под действием циклических нагрузок в зависимости от уровня и длительности нагружения, которое можно производить в любой требуемый момент времени, и при этом они не нуждаются в электропитании и постоянном подключении к измерительной аппаратуре.

Распространены датчики из металлической фольги [6, 84, 86, 113], полупроводниковые [8, 27, 89], из токопроводящих полимеров [99], из аморфных материалов, графита [98] и др. Для тензорезисторов из отожженной константановой фольги проведены исследования по оптимизации технологии изготовления и подбора их характеристик [6, 84, 86].

Принято считать, что изменение электросопротивления тензодатчиков происходит вследствие изменений в поперечном сечении решетки. Однако специальные эксперименты показали, что в усталостных датчиках при оптическом сравнении до и после нагружения не происходит пространственных изменений их решетки, хотя и существенно меняется электросопротивление [113]. Поэтому в данной работе предлагается объяснять увеличение электросопротивления датчиков не пространственными изменениями, а меняющимся удельным сопротивлением (Ом/мм^3).

Определенный интерес представляет проблема как повышения, так и уменьшения чувствительности датчиков к накоплению повреждений, что можно получить за счет изменения амплитуды их деформирования. Для уменьшения деформации датчик располагают в области детали, где нагрузки в определенном соотношении меньше, чем в контролируемой области. Для увеличения деформации, действующей на датчик, используют множитель (мультипликатор) деформации. Существует ряд конструктивных решений мультипликаторов [65, 95], основанных, в сущности, на трех способах повышения чувствительности датчиков усталостного повреждения (как отдельно, так и в комбинации):

- увеличение базы измерений;
- повышение напряжений в зоне установки датчиков с помощью концентраторов напряжений;
- повышение деформативности в этой зоне.

В большинстве случаев датчики такого типа используются для условий многоциклового усталости, что требует увеличения их долговечности на достаточно большое число циклов, но возможно их применение и в малоциклового области.

Для тарировки датчиков усталостного повреждения обычно применяются стандартные методы испытаний на усталостную долговечность при постоянных амплитудах циклов деформирования, при этом строятся типовые зависимости сопротивления $\Delta R / R_0$, где $\Delta R = R - R_0$, а R_0 – начальное

сопротивление, от числа циклов нагружения n . При аналитическом описании подобных зависимостей наиболее часто используются соотношения вида

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \alpha_1 (\Delta \varepsilon)^{\alpha_2} n^{\alpha_3},$$

$$\Delta R = 10^{\alpha + \beta \lg n + \gamma \lg^2 n} (\Delta \varepsilon - \varepsilon^*)^{\alpha + \beta \lg n + \gamma \lg^2 n},$$

где $\Delta \varepsilon$ – амплитуды циклов деформирования;
 ε^* – пороговые значения амплитуд циклических деформаций, при которых датчик нечувствителен к циклическому нагружению.

Остальные же коэффициенты в этих уравнениях определяются на основе регрессионного анализа экспериментальных данных, получаемых при усталостных испытаниях датчиков.

В некоторых случаях предлагается вводить дифференциальные уравнения изменения электросопротивления от числа циклов деформирования. В частности, для полупроводниковых датчиков типа КТД-2А в диапазоне деформаций $\Delta \varepsilon = (0,425 \dots 1,125) \cdot 10^{-3}$ получено уравнение

$$\frac{d\varphi}{dn} = 10^{-4,56+1,07\varphi} (\Delta \varepsilon)^{1,6}.$$

Результаты исследования при частоте нагружения (37...310 Гц), температуре (223...308 К) и величине средней деформации $(-4,0 \dots +4,0) \cdot 10^{-3}$ показали, что изменение электросопротивления датчиков определяется лишь величиной циклической деформации и не зависит от величины и знака средней деформации цикла, а также частоты нагружения [84, 86]. В различных работах указывается как на наличие, так и на отсутствие связи между порогом чувствительности датчика и величиной средней деформации [84].

Первоначально датчики такого типа предполагалось использовать непосредственно как датчики усталостного повреждения. По их повреждению пытались судить о повреждении конструкции [95, 116]. Но большие сложности с определением меры накопленного повреждения элемента конструкции несколько охладили исследователей к подобной интерпретации показаний датчиков, и было предложено использовать их как датчики силовой нагруженности [8].

Анализ методов исследования распределений напряжений и деформаций на поверхности деталей машин, подвергающихся действию цикли-

ческих нагрузок, с помощью датчиков показывает, что существуют два принципиально различных метода получения требуемой информации. Первый метод основан на использовании датчиков деформаций дифференциального типа, которые регистрируют уровень деформаций на исследуемых участках поверхности детали на каждом цикле ее нагружения (деформирования). Типичным представителем указанного типа датчиков являются электротензометры. Второй метод предполагает применение датчиков деформаций интегрального типа, обладающих способностью изменять свои выходные параметры в зависимости от интенсивности и длительности циклического деформирования. К такого типа датчикам можно отнести датчики, меняющие электросопротивление, а также гальванические медные датчики.

Были проведены экспериментальные исследования модели накопления повреждений (изменения сопротивления) в датчиках, сущность которой в том, что после нагружения на некотором уровне в течение n_1 циклов происходит параллельный переход с этой кривой изменения сопротивления на кривую, соответствующую уровню деформирования $\Delta\varepsilon_2$. Затем после нагружения в течение n_2 циклов на этом уровне происходит переход на кривую, соответствующую $\Delta\varepsilon_3$, и т. д. [86]. Это свойство датчиков можно использовать как для восстановления характеристик силонагруженности детали, так и непосредственно для оценки накопленного повреждения.

Рассмотрим сначала два способа восстановления силонагруженности с помощью датчиков интегрального типа, меняющих свое электросопротивление, которые сводятся к тому, что на основании предварительной тарировочной информации и измеренным в некоторый момент времени сопротивлениям датчиков, прикрепленных к элементу конструкции, устанавливаются некоторые характеристики предшествовавшего процесса нагружения этого элемента. В работе В. И. Бойко и В. Т. Трощенко предлагается методика определения амплитуды деформаций $\Delta\varepsilon$ для случая регулярного нагружения и среднеквадратичного отклонения деформаций $\Delta\varepsilon_{ck}$ в случае стационарного узкополосного нагружения с априори известным распределением амплитуд (Рэлея, Райса и т. д.) [84]. Использовались датчики из константовой фольги КФ4 с базой датчиков 5 мм и начальным сопротивлением $K_0 = 100$ Ом. Образцы с датчиками нагружались с частотой 800 Гц на установке, позволяющей проводить испытание на растяжение-сжатие при высокочастотном гармоническом и случайном узкополосном нагружении. В результате экспериментальных исследований изменения

сопротивления датчиков были получены следующие зависимости для гармонического и случайного нагружения:

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon_{ck}^* + \Delta R 10^{a - \beta \lg n - \gamma n_3^{(\alpha + \beta \lg n + \gamma \lg^2 n)^{-1}}},$$

где $\Delta \varepsilon_{ck}^*$ – пороговое значение чувствительности для среднеквадратичного отклонения.

Полученные результаты показывают, что интегральное изменение электросопротивления датчиков при случайном нагружении качественно подобно изменению электросопротивления датчика при постоянной амплитуде деформации. Постоянная деформация, при которой имеет место совпадение рассматриваемых кривых, может быть названа эквивалентной деформацией для данного режима случайного нагружения.

Продemonстрируем, как с помощью вышеуказанных формул по замеренному электросопротивлению ΔR можно оценить значение деформаций $\Delta \varepsilon$ и $\Delta \varepsilon_{ck}^*$ в месте наклейки датчика, если известны число циклов нагружения n и число максимумов нагрузки, которые предлагается получать по данным виброизмерений либо по расчетам частот собственных колебаний. Кроме того, указывается, что погрешность определения долговечности N не приводит к большим погрешностям при расчете $\Delta \varepsilon$ и ε_{ck} . Например, при накопленном сопротивлении $\Delta R = 10$ Ом и числе циклов нагружения $N = 10^6$ и $N = 2 \cdot 10^6$ (ошибка определения N составляет 100 %) разница в расчетах $\Delta \varepsilon$ всего 2 %, а $\varepsilon_{ck} - 5$ %.

В работе Г. Готлиба и Д. Зевиксона [113] обсуждается задача подбора гармонического нагружения для случайного процесса, представленного белым шумом.

В работе Н. Н. Добромыслова и С. М. Набойщикова [27] предложена несколько отличная от рассмотренных выше методика оценки характеристик силовых нагруженности по данным измерений уровня повреждения датчиков, основанная на размещении в исследуемом месте конструкции или детали машины усилителя деформации механического типа, на котором наклеены однотипные датчики по уровневому принципу мультипликатора, испытывающие поэтому одинаковое число циклов нагружения, но с различными амплитудами, пропорции между которыми легко устанавливаются и контролируются. Такого типа датчики усталостного повреждения называются кассетными [8]. Если процесс нагружения регистрируется датчиками с одинаковым масштабным коэффициентом, то кассетный датчик

имеет единственное преимущество перед простым: осреднение его показаний позволяет уменьшить возможные погрешности, вызванные разбросом свойств датчиков. Если масштабные коэффициенты усиления $c_i, i = 1, \dots, k$, различны, то появляются дополнительные возможности оценки характеристик силовонагруженности.

В этой методике так же, как и в предыдущей, предполагается, что процесс нагружения является узкополосным и стационарным, но здесь ставится уже несколько другая задача: оценка плотности распределения размахов циклов процесса нагружения. Считается, что известен аналитический вид плотности $p(\Delta\varepsilon, \beta_1, \dots, \beta_k)$, где β_1, \dots, β_k – параметры распределения, требующие статистической оценки.

Сперва задаются некоторым значением ε_{\max} таким, что с вероятностью, близкой к единице, все размахи процесса нагружения лежат в интервале $0 \leq \Delta\varepsilon \leq \varepsilon_{\max}$. Это значение можно задать достаточно произвольно, исходя из предварительного анализа процесса нагружения. После оценки плотности вероятности $p(\Delta\varepsilon, \beta_1, \dots, \beta_k)$ всегда можно проверить условие

$$p(\Delta\varepsilon < \varepsilon) = \int_0^{\varepsilon_{\max}} p(\Delta\varepsilon, \beta_1, \dots, \beta_k) d\varepsilon = 1 - q,$$

где β_1, \dots, β_k – оценки параметров распределения;

q – уровень значимости (например, $q = 0,01$).

Если это условие не выполняется, то ε_{\max} следует увеличить и повторить расчет.

Диапазон $[0, \varepsilon_{\max}]$ делится на m равных интервалов длиной $h = \varepsilon_{\max} / m$. Вероятность события, состоящего в том, что размах процесса $\Delta\varepsilon$ попадает в интервал $[h(i-1), h(i)]$, вычисляется следующим образом:

$$p_i = \int_{h(i-1)}^{h(i)} p(\Delta\varepsilon, \beta_1, \dots, \beta_k) d\varepsilon, i = 1, \dots, m.$$

В предположении достаточной длины реализации (большого числа циклов нагружения N_0) можно заменить эту вероятность соответствующей статистической частотой:

$$\frac{N_i}{N_0} = \int_{h(i-1)}^{h(i)} p(\Delta\varepsilon, \beta_1, \dots, \beta_k) d\varepsilon, i = 1, \dots, m,$$

где N_i – число циклов процесса $\varepsilon_0(t)$, имеющих размах в полуинтервале $[h(i-1), h(i)]$.

Таким образом, исходный процесс $\varepsilon_0(t)$ заменяется схематизированным процессом, состоящим из m блоков, каждый из которых содержит N_i циклов с размахом $\Delta\varepsilon_i$, $i = 1, \dots, m$.

Исходной информацией для оценки силовонагруженности служат измерения величин повреждений датчиков, размещенных на разных уровнях мультипликатора в процессе эксплуатации конструкции, и тарифовочные кривые, построенные в результате предварительных испытаний датчиков при регулярных режимах нагружения с различными размахами:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi(\Delta\varepsilon, n), \Delta\varepsilon \geq \varepsilon^* \\ 0, \Delta\varepsilon < \varepsilon^* \end{cases},$$

где $\varphi = \Delta R/R_0$, либо $\varphi = \lg(\Delta R/R_0)$, – относительное изменение начального сопротивления датчика после некоторого числа циклов деформирования n с размахом $\Delta\varepsilon$;

ε^* – пороговое значение деформации датчика, ниже которого датчик не реагирует на деформации.

Мультипликатор, размещенный в исследуемом месте конструкции, преобразует относительную деформацию его базы $\varepsilon_0(t)$ в деформации баз датчиков, установленных на разных уровнях. Считается, что мультипликатор производит линейное преобразование процесса $\varepsilon_0(t)$ в процесс деформирования $\varepsilon_i(t)$, i – номер уровня, так что размахи этих процессов связаны зависимостью $\Delta\varepsilon_i = \varepsilon_i \Delta\varepsilon_0$, где ε_i – константа мультипликатора (калибровки).

В работе В. И. Бойко и В. Т. Трощенко [84] показана возможность аппроксимации подобных тарифовочных кривых посредством аналитических зависимостей. Кроме того, утверждается, что если ввести новую меру повреждения

$$v = \left(\frac{\varphi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \begin{cases} (\Delta\varepsilon)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}} \cdot n, \Delta\varepsilon \geq \varepsilon^* \\ 0, \Delta\varepsilon < \varepsilon^* \end{cases},$$

то для нее при циклическом деформировании датчика процессом нагружения с переменными размахами и постоянной частотой можно применить правило линейного суммирования:

$$v_n = \sum_{j=1}^{n_j} (\Delta\varepsilon)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}} \cdot n_j,$$

где n_j – число циклов деформирования при размахе $\Delta\varepsilon_j$, $j = 1, \dots, m$, m – число различаемых по величине размахов процесса нагружения.

В этом случае, если в предыдущей формуле для каждой величины цикла деформирования поставить в соответствии ее долю p_j в достаточно длинной реализации и затем проинтегрировать по всем $\Delta\epsilon$ для каждого датчика, то математическое ожидание величины, накопленной в датчике за N_0 циклов, на уровне мультипликатора j будет

$$Ev_{iN_0} = N_0 \int [(C)_i (\Delta\epsilon)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}} p(\Delta\epsilon, \beta_1, \dots, \beta_k) d\Delta\epsilon, i = 1, 2, \dots, k + 1.$$

Константы C_i у мультипликаторов задаются так, чтобы за счет наличия у датчиков порога чувствительности на каждом уровне повреждения накапливались только от циклов, имеющих размах $\Delta\epsilon_i \geq \epsilon^*/C_i$. Тогда значение меры повреждения v_i на каждом из уровней i будет некоторой функцией параметров

$$v_i = \Phi(\beta_1, \dots, \beta_k, N_0, C_i).$$

Задача оценки плотности вероятности распределения размахов процесса $\epsilon_0(t)$ представляет собой обратную задачу: по замеренным ϕ_i требуется оценить параметры β_1, \dots, β_k , а также число циклов N_0 . Поэтому для получения замкнутой системы уравнений необходимо задать $(k + 1)$ уровень, $i = 1, 2, \dots, k + 1$. Подставляя аналитические зависимости для плотности $p(\Delta\epsilon, \beta_1, \dots, \beta_k)$ и функции накопления повреждений в формулу для математических ожиданий величин повреждений, накопленных в датчиках, и используя в качестве оценок математических ожиданий измеренные значения v_i в датчиках, приходим к требуемой системе уравнений.

В работе Н. Н. Добромыслова и С. М. Набойщикова [27] приводятся результаты экспериментальной проверки этой методики. Тарировочные эксперименты проводились с полупроводниковыми кремниевыми тензорезисторами, имеющими базу $1,7 \pm 0,5$ мм и шириной $0,2 \dots 0,05$ мм. Датчики наклеивались на консольную тарировочную балку из рессорно-пружинной стали 65Г, которая нагружалась симметричным синусоидальным плоским изгибом по жесткой схеме с частотой 2 Гц. Получена следующая регрессионная зависимость для меры $\phi = \Delta R/R_0$ от числа циклов нагружения n :

$$\phi = \begin{cases} 6,74 \Delta\epsilon^{1,76} n^{0,45}, & \Delta\epsilon \geq \epsilon_0 = 8 \cdot 10^{-4} \\ 0, & \Delta\epsilon < \epsilon_0 \end{cases}.$$

Методику оценки плотности вероятности размахов процесса $\varepsilon_0(t)$ апробировали с использованием той же установки. При этом мультипликатором служила сама балка с наклеенными в разных сечениях датчиками (по 10 штук в сечении) таким образом, что коэффициенты усиления оказались равными, соответственно, $C_1 = 0,9$, $C_2 = 0,7$, $C_3 = 0,5$, $C_4 = 0,3$ (всего четыре уровня). Аналитический вид плотности распределения амплитуд перемещений y_a свободного конца балки задавался как $p(y_a) = \beta_1 y_a^2 + \beta_2 y_a$, где $\beta_1 = 0,222$, $\beta_2 = 0,666$, а реализации процесса нагружения моделировались 15 блоками по гистограмме, соответствующей плотности распределения. Общая длина экспериментально моделируемой реализации составила $N_0 = 2 \cdot 10^4$ цикла.

В целом можно сделать вывод, что в настоящее время существуют достаточно проработанные средства и методы оценки силовонагруженности элементов конструкций, которые при соответствующей модификации могут использоваться для элементов механических систем.

8.2. Усталостное поведение датчиков

Напомним, что суть рассматриваемых датчиков состоит в том, что в процессе нагружения происходит необратимое изменение их электросопротивления, которое доступно для измерения, по виду же они являются обычными тензорезисторами. Рассмотрим исследования усталостного поведения двух типов датчиков, не отличающихся от обыкновенных фольговых тензорезисторов конструктивно по виду и способам закрепления на конструкции.

1. ДКФ – датчики, изготовленные из отожженной в вакууме константановой фольги (Киев, Украина).

2. МПТ – многокомпонентные полупроводниковые тензорезисторы, изготовленные из трехкомпонентного соединения висмут-теллур-сурьма ($\text{V}_{12}\text{Te}_3\text{Sb}_2$) и выполненные в виде диффузионной пленки, полученной в вакууме на диэлектрической подложке (Фергана, Узбекистан).

К основным достоинствам и тех, и других датчиков можно отнести малые размеры, простоту конструкции, технологичность изготовления, отсутствие необходимости постоянного подключения сложных измерительных и записывающих приборов. Установленные на конструкции датчики при совместном с конструкцией циклическом нагружении необратимо меняют свое электросопротивление. Величина изменения зависит от уровня действующих нагрузок и длительности циклического нагружения. Необра-

тимо накапливая изменение электросопротивления, датчики фиксируют информацию о нагрузке, которая может быть использована для определения параметров режима нагружения конструкции.

Рассмотрим сначала случай регулярного нагружения.

Основной метрологической характеристикой таких датчиков является зависимость необратимого изменения электросопротивления, выраженная в относительных величинах $\varphi = \Delta R / R$ (где R – текущее значение сопротивления, а ΔR – прирост значений сопротивления) в зависимости от амплитуды циклического нагружения ε_a числа циклов нагружения n , приложенного к паре «элемент – датчик». Назовем величину φ повреждением датчика, а процесс изменения φ во времени – процессом накопления повреждения датчика.

8.2.1. Методы тарировки

Для испытаний свойств и тарировки датчиков усталостного повреждения использовалась машина «Instron 1251». Эта машина позволяет осуществлять как статистическое, так и циклическое нагружение. Она отличается высокой точностью и стабильностью параметров режима нагружения, а также простотой их регулировки.

Для тарировки датчики наклеивались на тарировочную балку постоянного прямоугольного сечения, загружаемую плоским изгибом по схеме двухопорного изгиба сосредоточенной нагрузкой, прикладываемой в центре (рис. 8.2.1). Преимуществом данной схемы является возможность испытания датчиков одновременно на нескольких уровнях нагрузки при их наклеивке в различных сечениях, а также возможность проведения испытаний при более высоких нагрузках (сопротивление усталости при изгибе значительно выше, чем при растяжении-сжатии).

При наклеивке датчиков на тарировочную балку во всех случаях был использован клей «Циакрин – ЭО».

Параметры режима нагружения – среднее значение, амплитуда перемещения среднего сечения балки, частота нагружения – контролировались по показаниям цифровых индикаторов испытательной машины. Точность контроля перемещений среднего сечения была не ниже, чем 0,0075 мм. Параметры режима нагружения датчиков (среднее значение и амплитуда деформаций) определялись через параметры перемещения среднего сечения балки, а в случае ДКФ контролировались по показаниям самих датчиков.

Деформации в датчиках определялись при помощи цифрового измерителя деформаций ИДЦ-1. Данный прибор использовался также для измерения остаточного изменения сопротивления ДКФ. Цена одной единицы дискретности показаний прибора – 10 е.о.д. (10^{-5}), или 0,002 Ом. Определение остаточного изменения сопротивления МПТ не требует столь большой точности, и в этом случае был использован прибор комбинированный цифровой Щ4313, который гарантирует определение сопротивления датчиков с точностью 1 Ом. Для определения деформаций ДКФ по их собственным показаниям был определен их коэффициент тензочувствительности. При определении коэффициента тензочувствительности балку с наклеенными на нее датчиками подвергали чистому изгибу с помощью устройства статического нагружения УТС-12. Математическое ожидание коэффициента тензочувствительности датчиков составило 2,08, а его среднеквадратичное отклонение – 0,01.

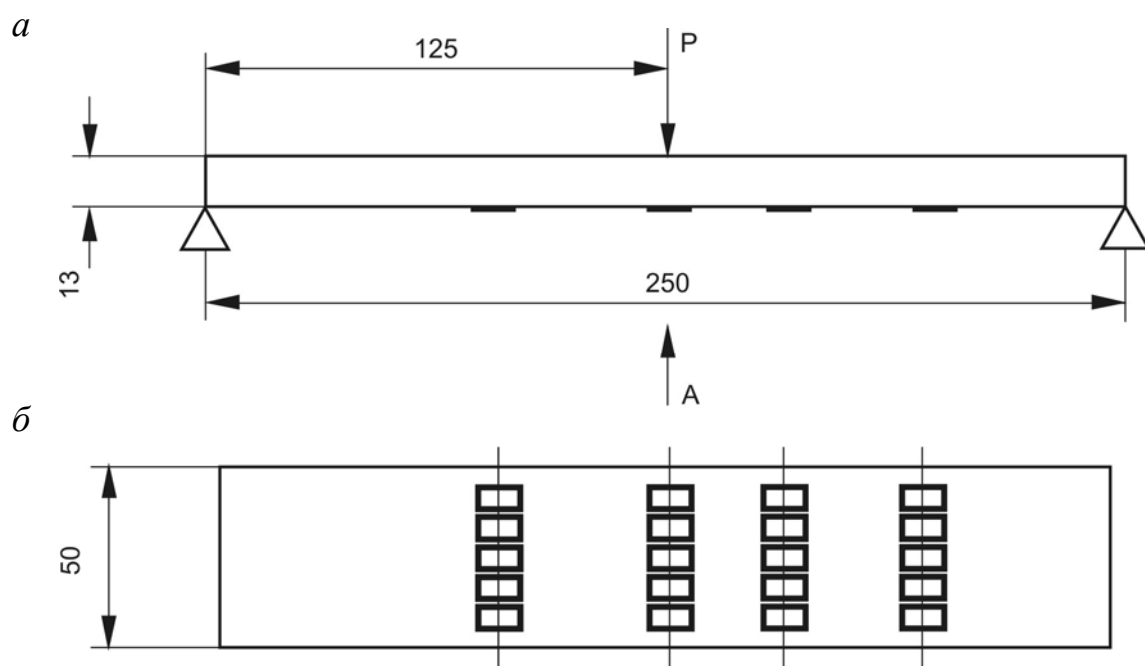


Рис. 8.2.1. Схема нагружения балки и расположения датчиков:

а – общий вид; *б* – вид А

При тарировке датчиков было установлено, что деформации датчиков, наклеиваемых близко к краю балки, несколько превышают деформации остальных датчиков, что обусловлено неоднородностью деформаций по сечению. Поэтому зона наклейки датчиков была ограничена по ширине – наклейка крайнего датчика не ближе 7,5 мм от края. Таким образом, при ширине балки 50 мм рабочая зона наклейки составила 35 мм.

Контроль температуры во время испытаний показал ее возрастание не более, чем на 9 °С, поэтому в дальнейшем температурным фактором мы будем пренебрегать.

8.2.2. Датчики усталостного повреждения из константановой фольги

Характеристики ДКФ определяются его конструкцией и технологией изготовления [6]. Основные характеристики оптимального по конструкции и технологии изготовления датчика приведены в работе В. И. Бойко и В. Т. Трощенко [84]. В испытаниях была использована партия датчиков с базой 5 мм и начальным электросопротивлением 100 Ом.

Тарировочные функции строились для случая гармонического нагружения с различными амплитудами деформаций в диапазоне от 1,05 до 2,632. На рис. 8.2.2 представлены выборочные кривые для двух амплитуд нагружения. Испытания показали, что для различных датчиков, нагружаемых одинаковыми историями нагружения, при амплитудах, меньших 1,742, пересечение выборочных кривых возможно (рис. 8.2.2, *а*). На рис. 8.2.3 приведены средние кривые для всех амплитуд нагружения, использованных при испытаниях.

Пределом испытаний служила относительная величина изменения электросопротивления $\varphi = 2,5$, поскольку для больших величин наблюдалось неконтролируемое изменение сопротивления, что, по-видимому, объясняется развитием собственных повреждений датчиков, приводящих к изменению их кристаллической решетки и зарождению трещин. Данное соображение является ограничивающим для использования датчиков усталостного повреждения посредством прямой наклейки на конструкцию, но всегда есть возможность использования умножителя деформаций, как будет показано в дальнейшем.

В ходе циклических испытаний были подтверждены свойства датчиков, установленные ранее другими исследователями [42]:

- характеристики датчика не зависят от коэффициента асимметрии цикла, частоты нагружения, температуры;
- коэффициент тензочувствительности датчика не зависит от его повреждения (данное свойство позволяет использовать датчик для измерения деформаций).

Разброс показаний различных датчиков вполне удовлетворительный. Коэффициент вариации повреждений датчиков находился в диапазоне 5–20 % (большие значения – для меньших амплитуд деформаций). Статистическая обработка результатов испытаний с целью проверки гипотезы о нормаль-

ном распределении относительного изменения сопротивления датчиков показала, что эта гипотеза не противоречит опытным данным.

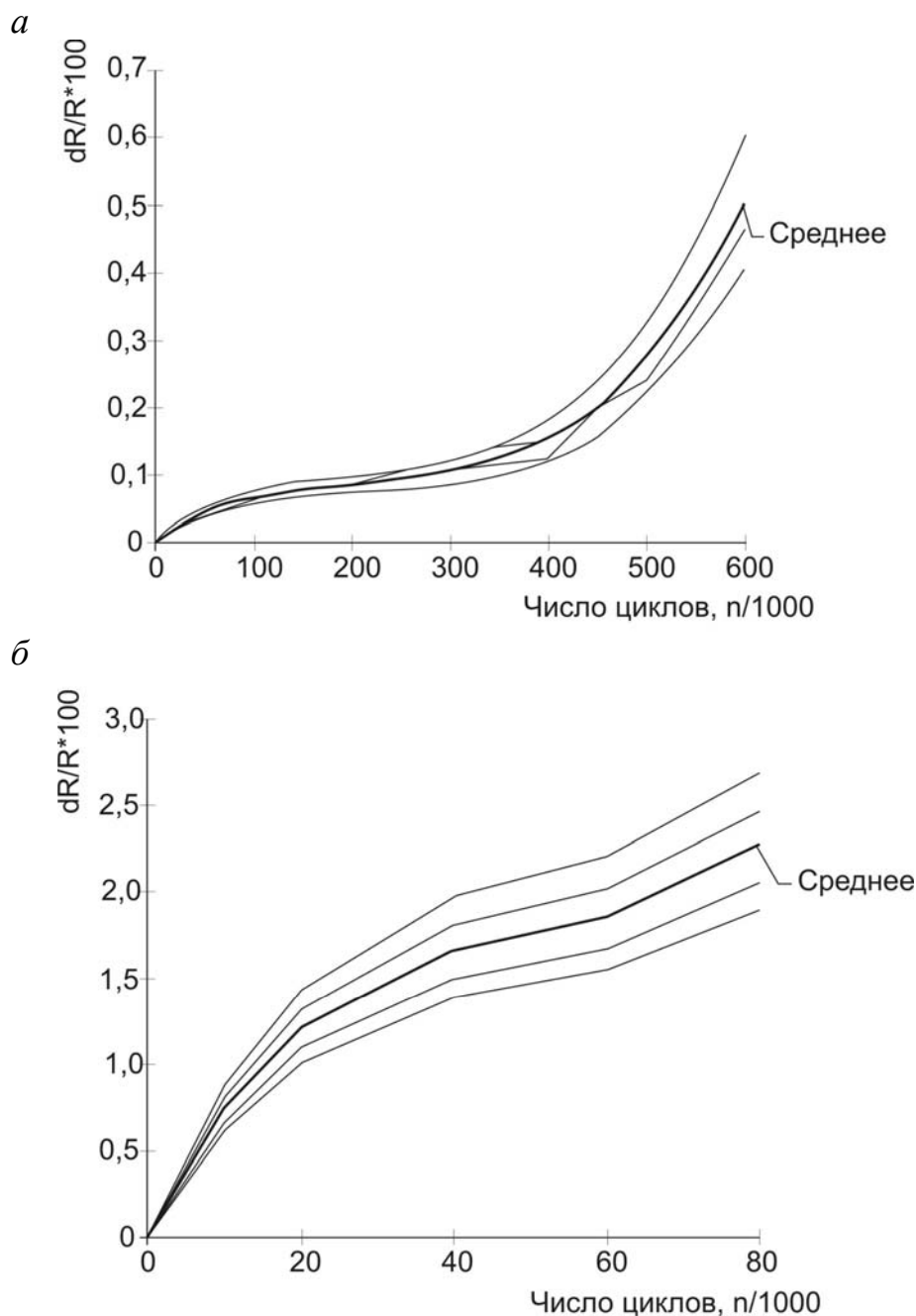


Рис. 8.2.2. Кривые изменения электросопротивления ДКФ:
а – $\varepsilon_a = 1,05$; *б* – $\varepsilon_a = 1,742$

Следует отметить, что датчики имеют порог чувствительности по деформациям, который для исследованной партии составил 0,001. При циклическом нагружении с амплитудой ниже порога чувствительности остаточного изменения электросопротивления в датчике не наблюдается. Для согласования чувствительности датчика с амплитудой действующих деформаций его необходимо использовать вместе с умножителем деформаций [86].

Чтобы воспользоваться методикой прогнозирования накопленного повреждения в элементе конструкции по линиям равного сопротивления датчиков, необходимо, в общем случае, провести испытания датчиков при нерегулярных историях нагружения.

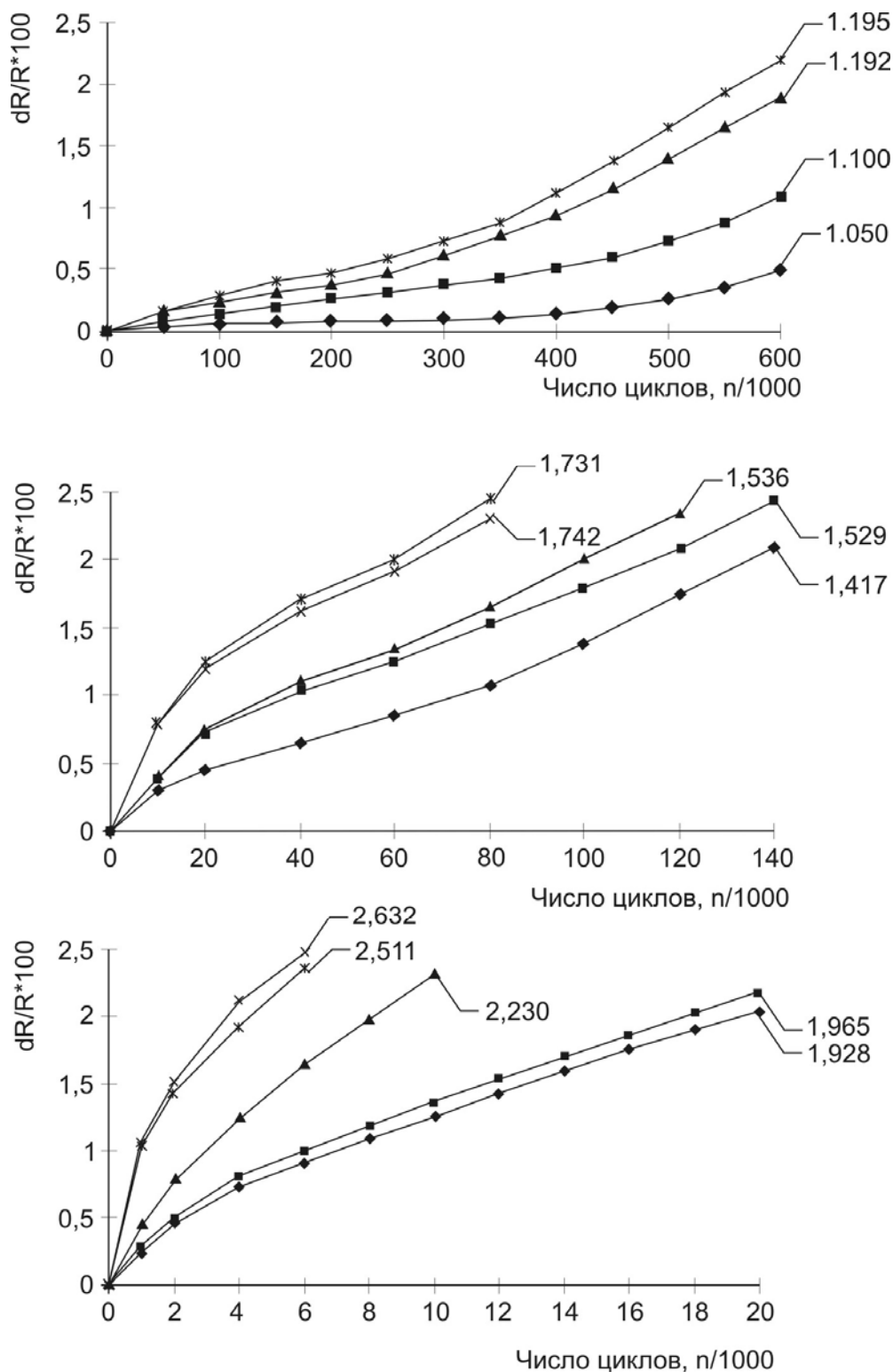


Рис. 8.2.3. Средние кривые изменения сопротивления для всех амплитуд испытаний ДКФ

8.2.3. Многокомпонентные полупроводниковые тензорезисторы

При тарировке была испытана партия датчиков с базой 15 мм и шириной 2 мм, изготовленных в Узбекистане. Отличительной особенностью этих датчиков является высокий коэффициент тензочувствительности и значительное изменение сопротивления при циклической деформации. Результаты тарировки датчиков для двух значений амплитуд деформаций представлены на рис. 8.2.4, где показаны тарировочные кривые различных датчиков, расположенных при нагружении в одном сечении балки. На этих же рисунках более толстой линией показаны средние значения для данных амплитуд деформаций. На рис. 8.2.5 вынесены кривые, построенные по средним показаниям датчиков.

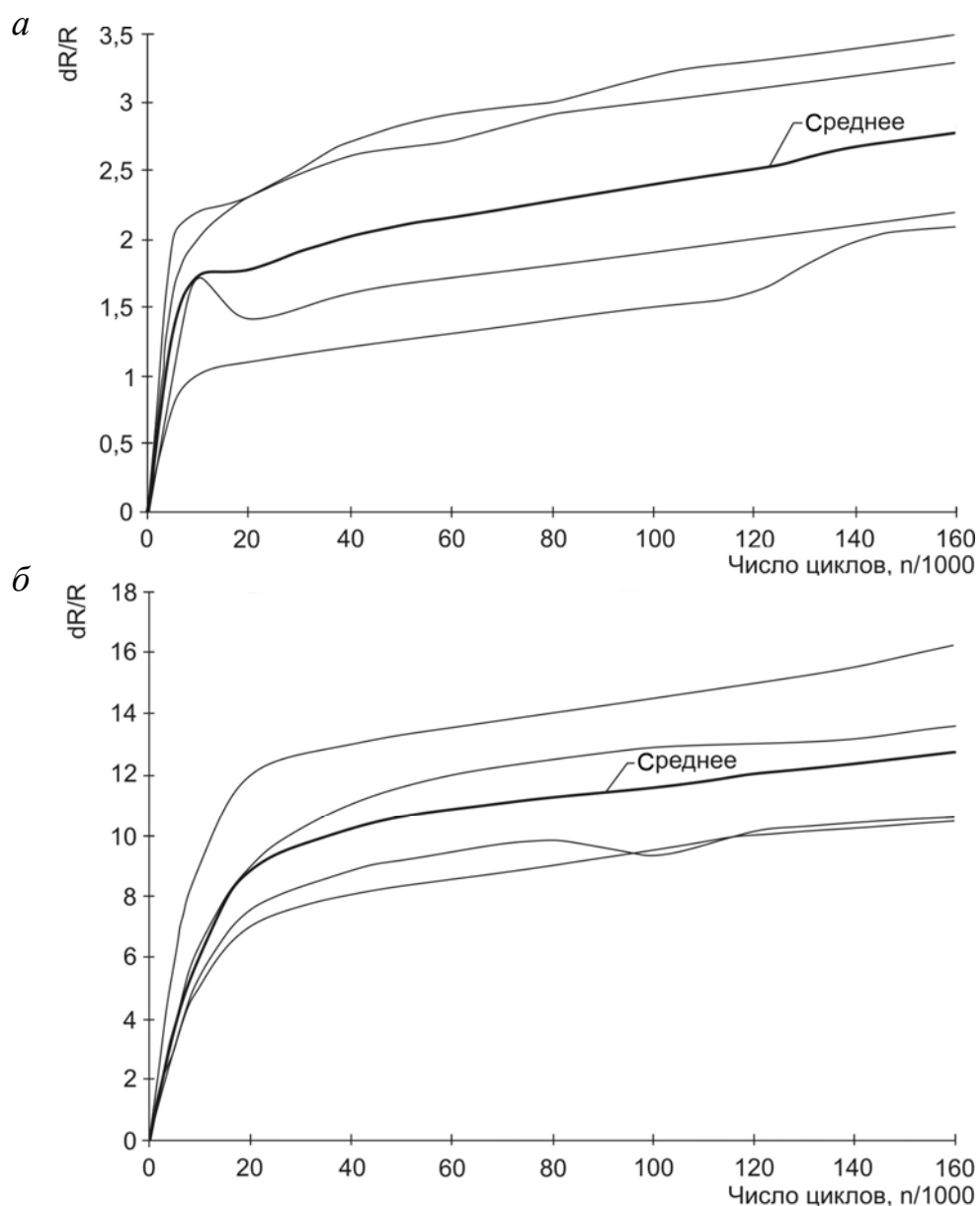


Рис. 8.2.4. Изменение электросопротивления МПТ:
 $a - 0,534$; $b - 1,494$

К достоинствам МПТ можно отнести широкий диапазон изменения сопротивления, а к недостаткам – большой разброс начального сопротивления (от 100 до 700 Ом), нестабильность показаний от датчика к датчику и неустойчивость роста сопротивления при циклическом нагружении. Более того, в некоторых случаях проявляется даже немонотонность изменения электросопротивления.

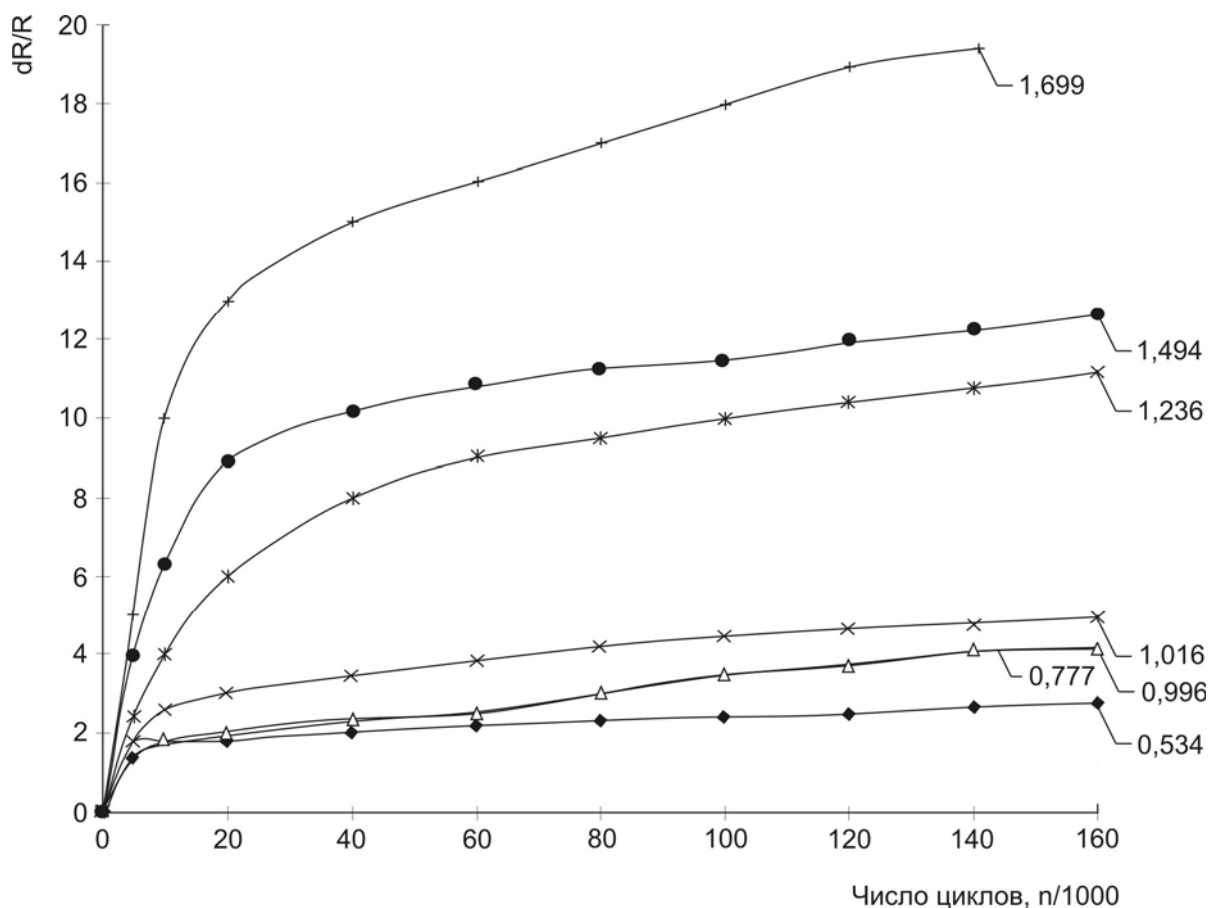


Рис. 8.2.5. Средние кривые изменения электросопротивления МПТ для различных значений амплитуд деформаций

В результате циклических испытаний получены тарировочные зависимости для партий ДКФ и МПТ. Испытания показали, что ДКФ по своим метрологическим характеристикам превосходят МПТ, поскольку их показания более стабильны и отличаются монотонным ростом по мере приложения нагрузки, соответственно, использование датчиков из константовой фольги более предпочтительно.

8.3. Нерегулярное нагружение датчиков

В реальных условиях конструкции подвергаются случайному циклическому нагружению, которое в лабораторных условиях имитируется програм-

мым нагружением. Представляет интерес, как ведет себя датчик при изменении уровня нагрузки. С целью анализа данной ситуации было смоделировано простейшее программное нагружение. Полученные результаты представлены на рис. 8.3.1. Там же показана и реализованная программа нагружения.

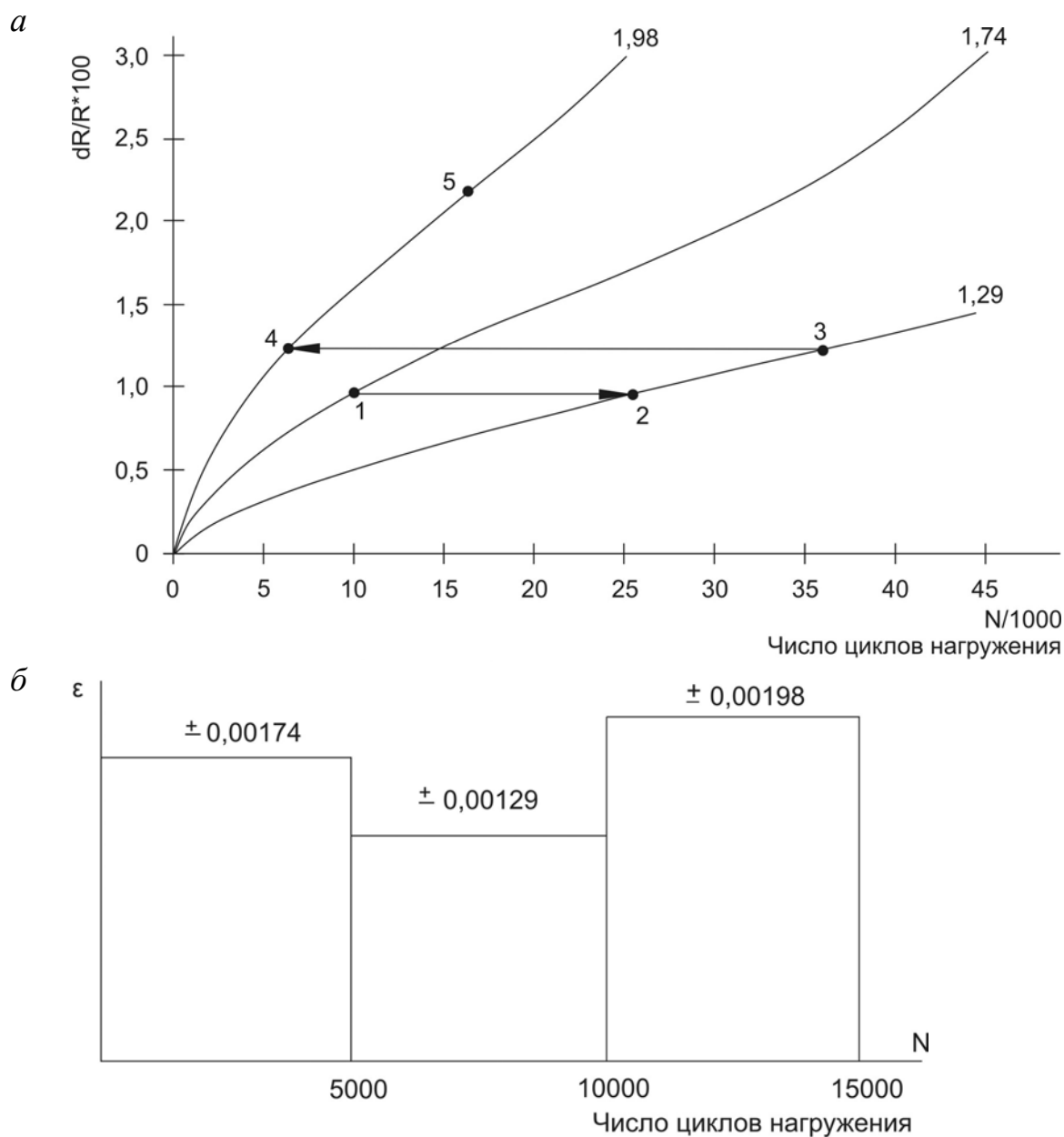


Рис. 8.3.1. Реализация программного нагружения:

a – переход с одной кривой изменения электросопротивления на другую;

b – реализованная программа нагружения

После перехода с одного уровня циклической деформации на другой характер дальнейшего изменения сопротивления датчика можно определить путем горизонтального переноса точки 1 с кривой $\varphi = F(N)$, соответствующей первому уровню циклической деформации ε_1 , в точку 2 кривой $\varphi = F(N)$. Та-

кой перенос соответствуют второму уровню циклической деформации ε_2 . При переходе с одного уровня циклической деформации на другой дальнейшее изменение электросопротивления при нагружении датчика зависит только от накопленного до этого повреждения датчика и величины нового уровня циклической деформации и не зависит от истории циклического нагружения. На этом свойстве основан расчет изменения сопротивления датчика в случае, если закон нагружения не гармонический, а произвольный.

Таким образом, при программном режиме нагружения полное изменение сопротивления может быть получено при помощи суммирования изменений сопротивления для соответствующих значений деформаций и чисел циклов путем горизонтального переноса с одной кривой $\varphi = F(N)$ на другую. Эта концепция была использована для построения функций сопротивления усталости конвейерных лент, рассматривавшихся в третьей главе. Можно заметить, что существует полная аналогия происходящих явлений при накоплении повреждений в этих элементах.

В том и другом случае элемент накапливает некоторое повреждение, приводящее к изменению его свойств. Если для ленты происходит снижение предела прочности и ухудшение ее эксплуатационных свойств, то датчик претерпевает подобные же изменения, но в отличие от ленты эти изменения теперь направлены во благо. Благодаря росту повреждений внутри датчика растет его сопротивление, что делает возможным зафиксировать некоторым образом нагрузку и попытаться решить обратную задачу: восстановление нагруженности по показаниям датчиков.

Подчеркнем также, что концепция индивидуализации усталостных характеристик элементов ТМ находит здесь свое подтверждение. Если индивидуальные кривые усталости и функции сопротивления усталости имели гипотетический характер, то функции $\varphi = F(N)$, обозначенные на рис. 8.2.2, 8.2.4, наглядно демонстрируют это свойство. Более того, данные кривые являются результатом опытных измерений, что дает нам право предполагать, что аналогичное свойство характерно и для ненаблюдаемых процессов усталостного повреждения, поскольку процесс изменения сопротивления датчиков обусловлен феноменом усталости. В частности, эти исследования и привели к появлению методов, рассмотренных в предыдущих главах.

Естественно, мы не можем проверить напрямую гипотезу о том, что переход с кривой на кривую, подобно показанному на рис. 8.3.1, происходит в действительности для каждого датчика, который имеет свои индиви-

дуальные усталостные свойства. Однако эта гипотеза может быть проверена по агрегированным данным, если используется нерегулярное нагружение, как это будет показано далее.

8.4. Аппроксимация зависимостей

Выше было показано, что ДКФ имеют ряд преимуществ в использовании перед МПТ. Поэтому здесь рассматривается процедура сглаживания методом наименьших квадратов кубическими полиномами экспериментальных точек только для ДКФ (ошибки составили не более 0,028). Зададим изменение электросопротивления φ для каждого прикладываемого уровня деформации ε_a в зависимости от n как

$$\varphi(n) = a_1 + a_2 n^2 + a_3 n, \quad (8.4.1)$$

коэффициенты для которых приведены в табл. 8.4.1. Следующая задача состоит в том, чтобы найти a_i , $i = 1, 2, 3$, как функцию от ε_a . И снова кубические полиномы показали удовлетворительное сглаживание, что дает

$$a_i(\varepsilon_a) = b_{0i} + b_{1i}\varepsilon_a + b_{2i}\varepsilon_a^2 + b_{3i}\varepsilon_a^3. \quad (8.4.2)$$

Коэффициенты уравнения (8.4.2) приведены в табл. 8.4.2. Рис. 8.2.2 показывает, что измеренное сопротивление для каждой группы датчиков при всех значениях n является случайной величиной. Уравнение (8.4.1) строится для средних значений, показанных жирной линией на рис. 8.2.2. Также подсчитывалось стандартное отклонение v , и оказалось, что для каждого ε_a оно может быть принято константой вне зависимости от числа циклов. Предлагается использовать следующее уравнение для v :

$$v = 0,35 - 0,132\varepsilon_a. \quad (8.4.3)$$

Чтобы производить статистические вычисления, требуется более репрезентативная выборка, чем четыре значения для каждого ε_a при некотором n . Преобразуем эти группы из четырех значений $\varphi(\varepsilon_a, n)$ следующим образом: вычтем среднее значение и поделим на стандартное отклонение, т. е. произведем нормализацию выборочной переменной. Введем нулевую гипотезу: все 14 выборок (число использованных амплитуд деформаций) по 4 числа (количество датчиков в одном сечении балки) при всех фиксированных значениях n принадлежат одной генеральной совокупности. Для этого проверим нулевую гипотезу о принадлежности ряда независимых

выборки единой генеральной совокупности путем непараметрического дисперсионного анализа с помощью непараметрического рангового критерия Краскела – Уоллиса. Результаты вычислений показывают, что эта гипотеза может быть принята с уровнем значимости не хуже 0,05.

Следующий шаг в тестировании этих нормализованных значений изменения сопротивления при различных амплитудах нагружения определяется тем, что они образованы посредством нормированной нормальной случайной величины с нулевым средним и единичной дисперсией. Использование критерия согласия χ^2 также с уровнем значимости 0,05 позволяет принять эту гипотезу; выборочная гистограмма и аппроксимирующая нормальная плотность изображены на рис. 8.4.1.

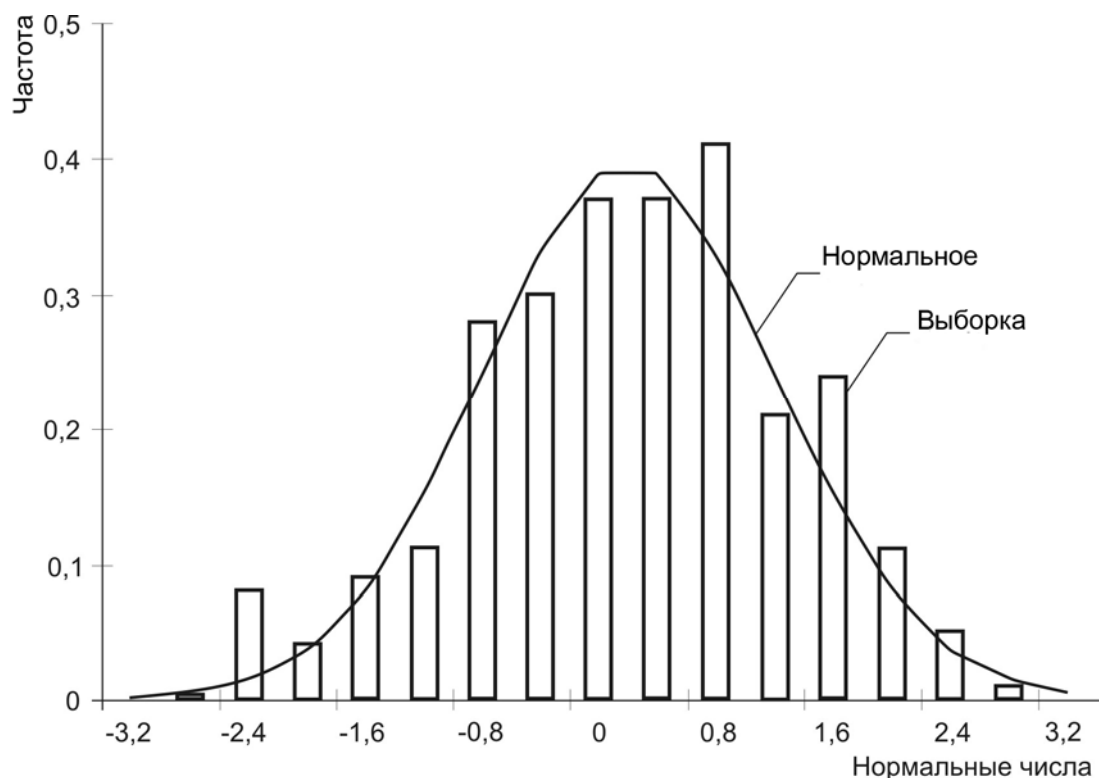


Рис. 8.4.1. Аппроксимация нормальным распределением выборочных значений нормализованного электросопротивления

Эти действия по статистической обработке означают, что существует семейство параметрических случайных функций $\xi(\varepsilon_a, n)$ со средним $m_\xi(\varepsilon_a, n) = \varphi(\varepsilon_a, n)$, определяемым уравнениями (8.4.1–8.4.2), и стандартным отклонением $\sigma_\xi(\varepsilon_a, n) = \nu m_\xi(\varepsilon_a, n)$, где ν определяется уравнением (8.4.3).

Полученная стохастическая модель посредством последовательного применения двух статистических гипотез может быть принята при первом

приближении для описания усталостного поведения датчиков. Отметим, что эта модель не является, конечно, идеалом, поскольку мы пренебрегли возможностью пересечения кривых изменения сопротивления датчиков, что отмечалось в экспериментах. Это означает, что, как и в гл. 4–6, может быть принята модель индивидуальных кривых теперь уже изменения электросопротивления. При этом, как и ранее, стохастичность самого процесса накопления повреждений не рассматривается.

Для порога повреждения было принято следующее выражение:

$$\varphi = 500\varepsilon_a - 0,45,$$

т. е. порог повреждения зависит от уровня действующей деформации. Следует отметить, что от уровня деформации зависит также и предел разрушения датчика [84].

Таблица 8.4.1

Коэффициенты кубических полиномов для уравнения (8.4.1)

ε_a	a_1	a_2	a_3
1,050	1,02–3	4,26–6	6,59–9
1,100	1,96–3	4,56–6	7,24–9
1,192	1,66–3	3,06–7	4,64–9
1,195	2,11–3	6,73–7	5,45–9
1,417	1,94–2	1,41–4	7,76–7
1,520	3,40–2	3,04–4	1,28–6
1,536	3,90–2	3,75–4	1,77–6
1,731	8,77–2	1,52–3	1,01–5
1,742	8,50–2	1,50–3	9,85–6
1,928	1,90–1	9,00–3	2,29–4
1,965	2,17–1	1,10–2	2,80–4
2,230	4,57–1	4,30–2	2,00–3
2,511	1,184	2,71–1	2,30–2
2,632	1,188	2,42–1	1,90–2

Таблица 8.4.2

Матрица коэффициентов кубических полиномов для уравнения (8.4.2)

	b_0	b_1	b_2	b_3
a_1	–0,233	0,921	–0,980	0,324
a_2	–0,417	0,938	–0,689	0,164
a_3	–0,042	0,093	–0,066	0,015

8.5. Умножитель деформаций для датчика

Как было отмечено в п. 8.2, для того, чтобы согласовать чувствительность ДКФ с действующими деформациями, датчик необходимо использовать вместе с умножителем деформаций. Усталостные разрушения часто происходят при общем низком уровне циклической деформации, на который датчик не реагирует. Умножитель деформаций позволяет увеличивать деформации в датчике до необходимого уровня. Если усталостное разрушение происходит в зоне концентрации напряжений, где установить датчик трудно, то, используя умножитель, расположенный на некотором удалении от концентратора, где уровень деформации ниже, можно воспроизвести в датчике деформации, имеющие место в зоне концентратора.

Умножитель деформаций представляет собой простое устройство, механически преобразующее деформации ε в детали в деформации $k\varepsilon$ в датчике, где k – коэффициент усиления умножителя.

При выборе конструкции умножителя к нему были предъявлены следующие основные требования:

- диапазон коэффициентов усиления $k = 2 \dots 13$;
- коэффициент k не зависит от деформации детали;
- коэффициент k не изменяется в процессе циклического нагружения умножителя;
- диапазон рабочих температур $-20 \dots +60$ °С;
- умножитель способен работать при деформациях растяжения и сжатия;
- при измерении сопротивления датчика предусмотрена компенсация температурных деформаций;
- умножитель имеет минимальные размеры и массу.

При разработке конструкции умножителя за основу был выбран умножитель, применяемый в ИПП АН Украины [6]. Разработанная для данных испытаний конструкция умножителя показана на рис. 8.5.1. Умножитель состоит из двух удлинительных пластин 1 и соединенной с ними перемычки 2 из эластичного материала. Датчик 3 наклеивается на умножитель таким образом, чтобы его фольговая решетка располагалась на эластичной перемычке, а подложка своими краями находила на удлинительные пластины. Эластичная перемычка наклеивается своей нижней поверхностью на центральную монтажную пластину 4, изготовленную из листа толщиной 0,15–0,20 мм. По концам удлинительных пластин точечной сваркой при-

вариваются монтажные пластины 5. Токовыводы датчика припаяны к монтажной колодке 6. Умножитель с датчиком приваривается на исследуемую деталь 7 точечной сваркой.

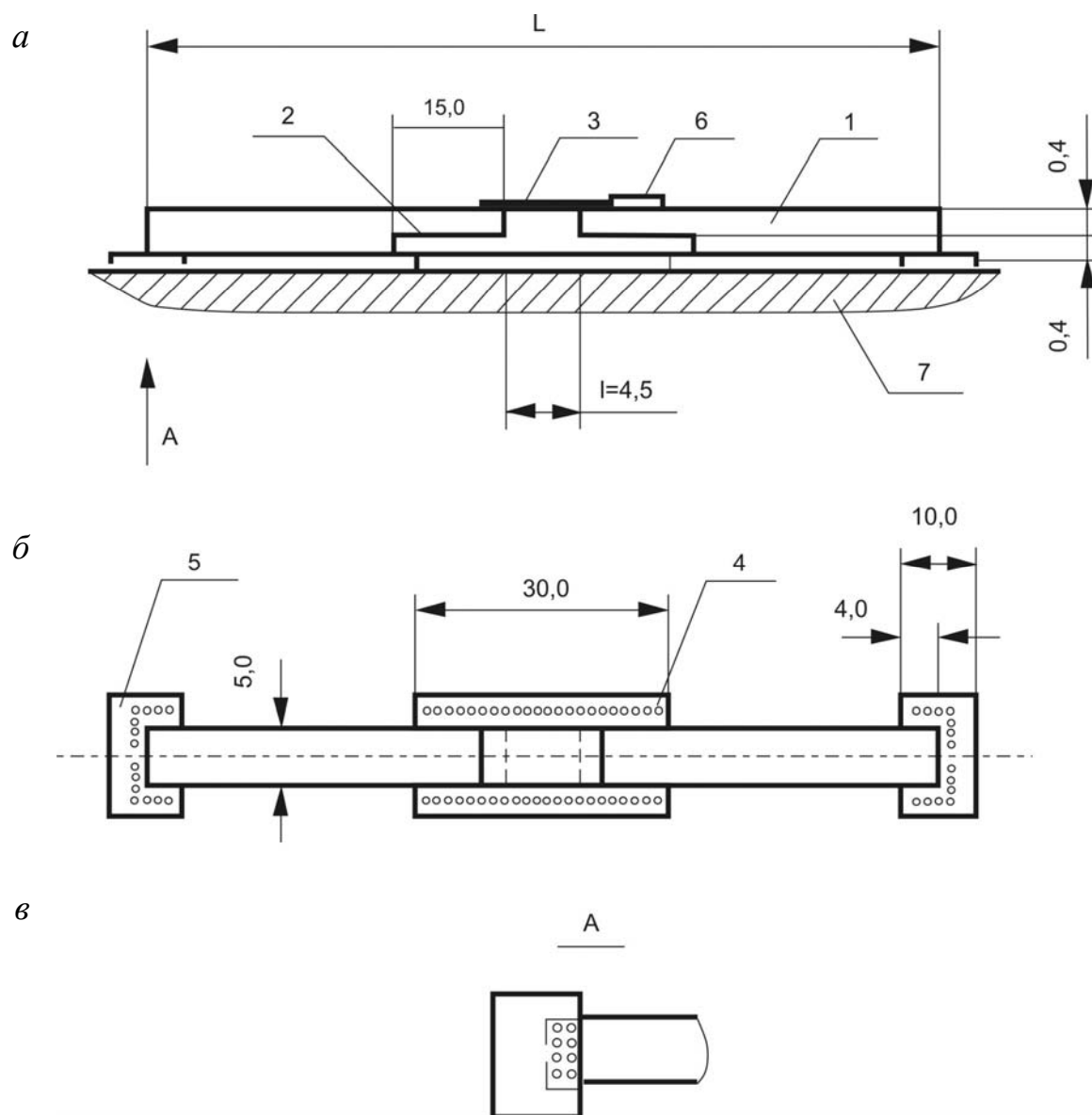


Рис. 8.5.1. Умножитель деформаций для датчика усталости:
а – общий вид; б – вид сверху; в – вид А

Принцип действия умножителя основан на увеличении базы: при деформации детали абсолютное удлинение на базе умножителя длиной L концентрируется на чувствительном элементе на базе длиной l . Эластичная перемычка умножителя не препятствует продольным деформациям датчика, но исключает его выпучивание при деформациях сжатия.

Была разработана методика изготовления датчика с умножителем деформаций, которая приведена в п. 8.7.

Испытания умножителей проводились при статическом нагружении растяжением-сжатием и при циклическом нагружении.

Коэффициент усиления умножителя определяется его длиной. На рис. 8.5.2 в координатах $k - L$ приведены результаты определения коэффициента k для умножителей различной длины. В обследованном диапазоне длин умножителей коэффициент усиления умножителя линейно зависит от его длины.

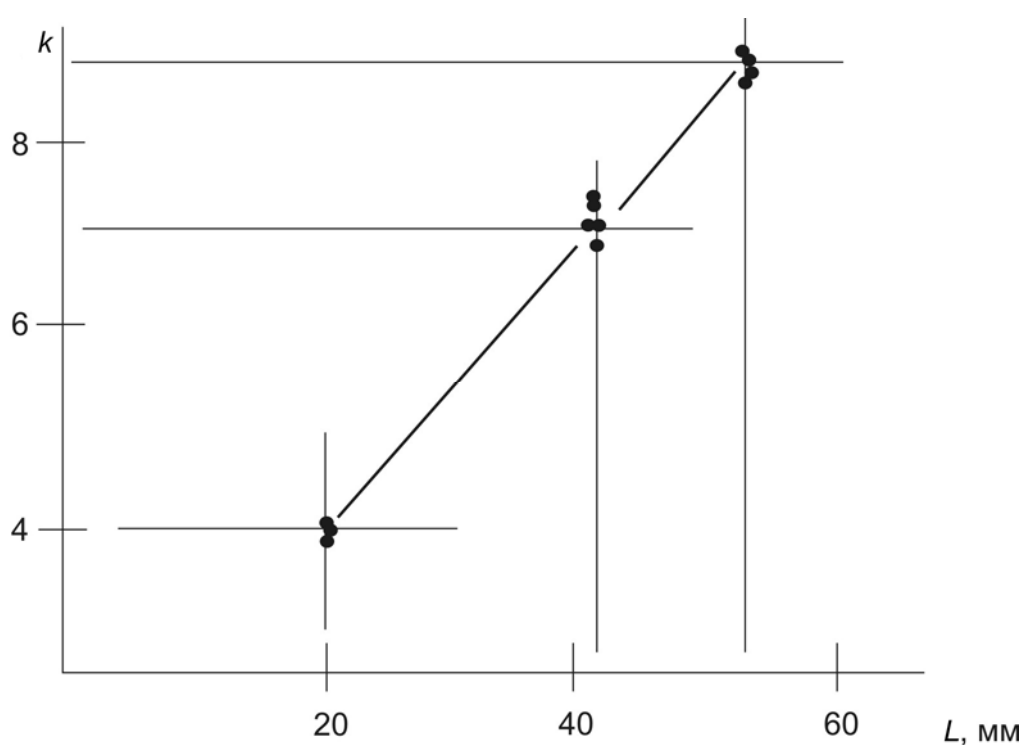


Рис. 8.5.2. Зависимость коэффициента усиления k умножителя от его длины L

Зависимость k от деформации ϵ в детали, на которой установлен умножитель, исследовалась в диапазоне деформаций $\pm 0,3 \cdot 10^{-3}$. На рис. 8.5.3 в координатах $k\epsilon - \epsilon$ для трех умножителей показана зависимость деформации в датчике от деформации в детали. Можно сделать следующие выводы:

- коэффициент усиления k не зависит от деформации ϵ элемента;
- усиление умножителя не зависит от знака деформации;
- данная конструкция умножителя обеспечивает необходимую точность измерений не хуже, чем при простой установке датчика на конструкцию.

Циклические испытания датчиков на умножителях показали, что характеристики датчиков, установленных на умножителе, совпадают с аналогичными тарировочными зависимостями для датчиков без умножителей, что позволяет при обработке полученных на натурных конструкциях показаний для датчиков на умножителях использовать тарировочные зависимости, построенные для датчиков без умножителей.

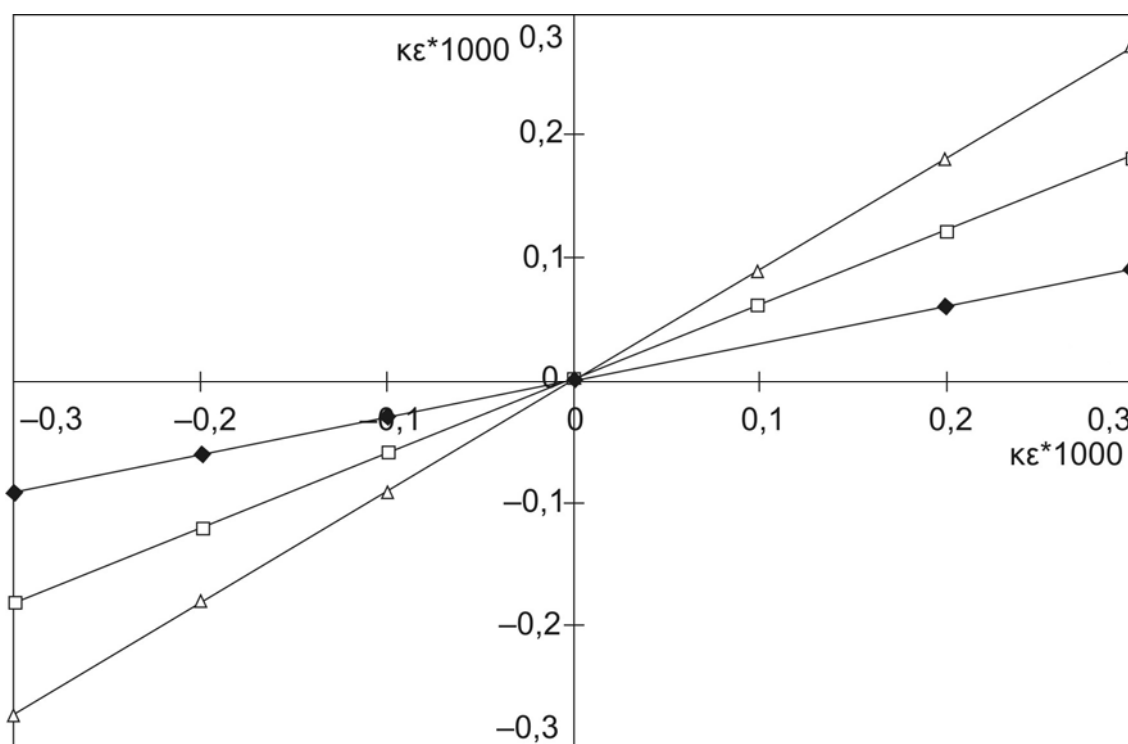


Рис. 8.5.3. Зависимость деформаций в датчике от деформации в детали

При тарировании циклическим нагружением датчиков на умножителях периодически определялся коэффициент усиления умножителей. При этом коэффициент усиления умножителей оставался практически постоянным. Для датчика с умножителем, установленного на конструкции, большое значение имеет компенсация температурных деформаций при измерении его сопротивления, так как температура окружающей среды в различные моменты снятия показаний с датчиков не является постоянной. При измерении сопротивления включение датчика осуществляется по полумостовой схеме, т. е. для измерения необходимо иметь еще компенсационный тензорезистор. Была проведена проверка возможности компенсации температурных деформаций в датчике на умножителе с помощью обычного тензорезистора, наклеен-

ного на стальную пластину. Датчик с умножителем монтировался на стальную балку, причем было осуществлено два способа монтажа: умножители приваривались к балке и умножители просто приклеивались [6]. Балка вместе с умножителями помещалась сначала в холодильник и там охлаждалась до $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$, потом помещалась в печь и там нагревалась до $+50\text{ }^{\circ}\text{C}$. В процессе охлаждения и нагревания производилось измерение электросопротивления датчиков. Для приваренных умножителей изменение сопротивления в датчике при температурных деформациях на всем диапазоне изменения температур не превышало $0,02\text{ Ом}$. Для приклеенных умножителей эта величина доходила до $0,4\text{ Ом}$. Можно сделать вывод, что предложенная конструкция умножителя в сочетании с компенсационным тензодатчиком обеспечивает температурную компенсацию сопротивления датчика усталости при измерениях, а значит, предложенная конструкция умножителя удовлетворяет всем обозначенным ранее требованиям.

8.6. Возможности использования кассетных счетчиков

При эксплуатации конструкция подвергается не гармоническому, а случайному нагружению. Для оценки параметров распределения возникающих в конструкции нагрузок можно использовать кассетные счетчики нагрузки [8], которые представляют собой набор ДКФ с различным коэффициентом усиления умножителя.

Принцип определения параметров распределения амплитуд деформаций при помощи кассетных счетчиков основан на том, что датчики с различным коэффициентом усиления умножителя имеют разный порог чувствительности, а датчики с различным порогом чувствительности реагируют на разные части спектра нагружения. Чем ниже порог чувствительности (чем больше коэффициент усиления), тем большую часть спектра нагружения отражает в своем изменении сопротивления датчик. Теоретические основы использования кассетного счетчика при исследовании случайных нагрузок были ранее разработаны В. В. Болотиным [8, 9].

Рассмотрим схему использования кассетного счетчика при исследовании случайных нагрузок в элементе МС. Пусть элемент при эксплуатации загружается обобщенной внешней нагрузкой $s(t)$, имеющей плотность распределения $p(s, \beta_1, \dots, \beta_n)$, где β_1, \dots, β_n – некоторые параметры этого

распределения. Нагружение конструкции обуславливает возникновение в элементе, на котором установлен кассетный счетчик, деформации $\Delta\varepsilon(t)$ с плотностью распределения размахов $p(\Delta\varepsilon, \beta_1, \dots, \beta_n)$, где β_1, \dots, β_n – параметры распределения $p(\Delta\varepsilon, \beta_{11}, \dots, \beta_{1n})$. Деформация в элементе вызывает деформации в датчиках. Деформация на k -м уровне кассетного счетчика составляет $\varepsilon_k = h_k \Delta\varepsilon$, где h_k – коэффициент усиления на k -м уровне.

Для поставленной цели теоретически в кассетном счетчике следует задать $(n + 1)$ уровень (на один больше, чем число параметров распределения нагрузки), т. е. использовать $(n + 1)$ датчик. Значение меры повреждения на уровне k в общем виде запишется выражением

$$\varphi_k(t) = (\beta_{11}, \dots, \beta_{1n}, N, h_k), k = 1, \dots, n + 1. \quad (8.6.1)$$

Подставляя в (8.5.1) вместо φ_k их оценки $\overline{\varphi}_k$, можно найти оценки параметров распределения размахов $\overline{\beta}_{11}, \dots, \overline{\beta}_{1n}$, а также общее число циклов нагружения N .

Для оценки вероятности безотказной работы (ВБР) по условию циклической прочности кроме полученных характеристик нагрузки нужно знать еще и характеристики прочностных свойств элемента МС. Оценка распределения амплитуд, приведенных к симметричному циклу, в сочетании с распределением предела выносливости позволит произвести оценку ВБР по критерию сопротивления усталости.

Решить систему трансцендентных уравнений (8.6.1) относительно параметров распределения удастся только в простейшем случае аппроксимации тарировочных зависимостей и определенного типа распределений размахов деформаций [27]. Поэтому при обработке показаний кассетного счетчика предлагается применять численные методы.

Для оценки параметров необходимо задаться классом функций распределения амплитуд деформаций. В программном обеспечении данной работы реализован выбор одного из следующих законов:

- Гаусса $p(\varepsilon, m, v)$, где m – математическое ожидание, а v – коэффициент вариации;
- Вейбулла $p(\varepsilon, a, b, c)$, где a – параметр масштаба, b – параметр формы, а c – параметр сдвига;
- Рэлея $p(\varepsilon, a)$, где a – параметр масштаба;
- логнормального $p(\varepsilon, m, v)$, где m, v – параметры распределения.

Исходными данными для расчета являются повреждения датчиков кассетного счетчика и соответствующие коэффициенты усиления умножителей деформаций.

Сначала выбирается исходная комбинация параметров распределения. Для этой комбинации производится замена плотности распределения амплитуд деформаций гистограммой. На базе полученной гистограммы случайное нагружение при данной комбинации параметров заменяется блочным нагружением. Количество циклов i -го уровня в блоке нагружения определится интегрированием

$$N_i = N_0 \int_{h_i-1}^{h_i} p(\epsilon, \beta_1, \beta_n) d\epsilon, \quad (8.6.2)$$

где N_0 – число циклов нагружения в блоке.

Общая гистограмма амплитуд перестраивается для каждого датчика в собственную гистограмму. При этом деформации каждого уровня умножаются на коэффициент усиления умножителя. Далее программа производит циклический пересчет повреждений датчиков кассетных счетчиков с учетом того, что уровни деформации, меньшие порога чувствительности к циклическим деформациям ($\epsilon < 10^{-2}$), считаются неповреждающими. Для каждой ступени текущего блока нагружения для повреждения датчика справедливы уравнения (8.3.1, а), в которых коэффициенты определяются в зависимости от действующих деформаций на текущей ступени нагружения и от того, превышен ли порог повреждения для этой ступени. Если в данную зависимость на место ϕ подставить накопленное ранее повреждение датчика и разрешить ее относительно числа циклов n , то можно найти число циклов n_1 , соответствующее накопленному повреждению и текущему уровню циклической деформации (точка 2 на рис. 8.3.1, а), т. е. число циклов в исходной точке отрезка повреждений на данной ступени. Если в зависимость (8.3.1) на место n подставить $n_2 = n_1 + \Delta n$, где Δn – количество циклов на данном уровне деформаций, определенное интегрированием (8.5.2), то можно определить повреждение датчика в конечной точке отрезка повреждений (точка 3 на рис. 8.3.1, а). Моделируя таким образом все уровни нагружения в блоке, находим повреждения датчика за весь блок нагружения.

После каждого уровня в блоке нагружения вычисляется критерий расхождения текущих повреждений с опытными, равный сумме квадратов относительных отклонений текущих значений повреждений от опытных:

$$SR = \sum_{i=1}^k \left(\frac{F(i) - F_0(i)}{F_0(i)} \right)^2, \quad (8.6.3)$$

где k – количество датчиков в кассетном счетчике;

$F(i)$ – текущее повреждение i -го датчика;

$F_0(i)$ – опытное повреждение i -го датчика.

Вычисленный критерий сравнивается с критерием расхождения, полученным для предыдущего уровня нагружения. Если он меньше предыдущего, то моделируется следующий уровень нагружения. Для определенного числа блоков нагружения расхождение становится минимальным, а далее увеличивается. Наименьшее расхождение, достигнутое при данном сочетании параметров распределения амплитуд деформаций, и соответствующее ему число блоков нагружения запоминаются. Далее генерируется новое сочетание параметров и для него также производится блочное нагружение и определяется минимальное значение критерия расхождения.

Возможен такой вариант, когда известно количество циклов нагружения и определению подлежат только параметры распределения амплитуд деформаций. В этом случае переход к новому сочетанию параметров осуществляется по достижении заданного количества циклов (блоков) нагружения.

Новое сочетание параметров определяется в соответствии со стратегией оптимального поиска, в основе которой лежит метод деформируемого многогранника в интерпретации Нелдера – Мида. В качестве критерия оптимизации принимается критерий (8.6.3) расхождения повреждений датчиков с опытными данными. Параметрами оптимизации, естественно, являются параметры распределения амплитуд деформаций. В конце поиска определяется сочетание параметров, наиболее соответствующее опытными данным.

С целью проверки алгоритма обработки показаний датчиков кассетного счетчика на оборудовании «Instron» было смоделировано случайное нагружение по закону Гаусса. При этом мультипликатором (умножителем) служила сама тарифовочная балка с наклеенными на нее в разных сечениях датчиками. Схема балки показана на рис. 8.6.1. Задача состоит в том, что-

бы по показаниям датчиков определить параметры режима нагружения в сечении А. Схема испытаний аналогична варианту, как если бы в сечение А было помещено несколько датчиков с различными коэффициентами усиления умножителей: $k_1 = 1,0$; $k_2 = 1,2$; $k_3 = 1,4$; $k_4 = 1,6$.

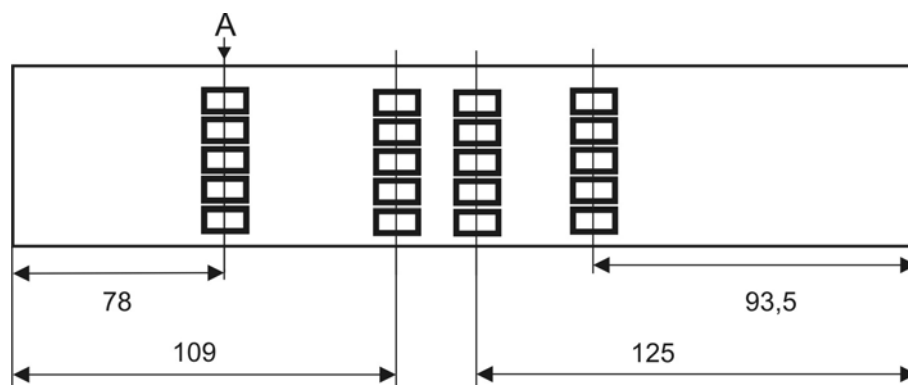


Рис. 8.6.1. Схема наклейки датчиков при блочном нагружении балки

Априорно задавались параметры распределения амплитуд перемещения среднего сечения балки, определяющие распределения амплитуд деформаций в различных сечениях балки. Далее моделировалась соответствующая реализация процесса нагружения и по показаниям датчиков оценивалась эмпирическая плотность распределения амплитуд деформаций в сечении А.

Априорно было принято гауссовское распределение амплитуд деформаций с математическим ожиданием $m = 1,186 \cdot 10^{-3}$ и коэффициентом вариации $v = 0,05$.

Процесс нагружения осуществлялся блоками. Число циклов в блоке нагружения было равным 1000. Диапазон изменения амплитуд деформаций $[m - 3s, m + 3s]$ был разбит на 20 частей. Последовательность уровней нагружения в каждом блоке выбиралась случайным образом. Всего было произведено 20000 циклов нагружения, т. е. 20 блоков. Средние повреждения датчиков $\varphi = \Delta R/R \cdot 10^2$ соответственно составили 0,230; 0,498; 1,038; 2,216. Обработка показаний датчиков кассетного счетчика по описанному выше алгоритму позволила получить оценки параметров нагружения. Сравнение действительных параметров нагружения и их оценок приведено в таблице.

Удовлетворительное совпадение априорного и расчетного распределений является показателем качества предлагаемой методики и свидетельствует о том, что кассетный счетчик действительно способен регистриро-

вать историю нагружения, а методика восстановления нагруженности вполне пригодна для практического применения.

Действительные и оцененные параметры нормального распределения

Параметр	Априорное значение	Оценка	Расхождение, %
$m \cdot 10^3$	1,186	1,162	2,0
ν	0,050	0,055	10,0
N	20000	22000	10,0

Поиск параметров распределения осуществляется путем оптимизации по критерию расхождения повреждений датчиков, полученных из опыта и оцененных по предлагаемому алгоритму. Как показал анализ чувствительности алгоритма, целевая функция сильно зависит от математического ожидания амплитуд и слабо – от коэффициента вариации. Поэтому точность определения математического ожидания оказалась выше точности определения коэффициента вариации.

Можно предположить, что определение параметров многопараметрических функций распределения по показаниям кассетных счетчиков будет для одних параметров давать достаточно точную величину, а для других – со значительной погрешностью. Теоретически это обусловлено, по-видимому, с одной стороны, тем, что система уравнений (8.3.1), лежащая в основе метода, является неустойчивой [27], а с другой стороны, тем, что характеристики датчиков имеют определенный разброс, который можно учесть с помощью индивидуализации их характеристик и проведения всех расчетов по вероятности.

Тем не менее, глобальное свойство, продемонстрированное на рис. 8.3.1, выполняется в полной мере, что дает возможность использовать данную процедуру для восстановления силонагруженности металлоконструкции по показаниям датчиков усталостного повреждения.

В качестве основного вывода укажем, что предложен способ инструментального мониторинга нагруженности элементов МС на основе датчиков усталостного повреждения, не требующих постоянного подключения к измерительной аппаратуре и позволяющих периодически снимать показания и производить оценку нагруженности за предыдущий период эксплуатации. Указанная процедура может сопровождаться оценкой нако-

пленного повреждения и распределений ресурса самой конструкцией при использовании методов прогнозирования, рассмотренных в предыдущих главах. В результате предварительных циклических испытаний необходимо определить характеристики датчиков усталостного повреждения, например, как в данном примере датчиков из константановой фольги и многокомпонентных полупроводниковых тензорезисторов. По своим метрологическим характеристикам ДКФ превосходят МПТ, поэтому в качестве базовых для исследования нагруженности и создания системы мониторинга элементов ТМ предлагается использовать ДКФ. Методика оценки параметров распределения амплитуд деформаций по показаниям датчиков касетного счетчика, в основе которой лежит компьютерное моделирование, позволяет оценивать повреждения датчиков при случайном циклическом нагружении и осуществлять перебор комбинаций параметров распределения в соответствии со стратегией оптимального поиска.

8.7. Инструкция по изготовлению умножителя деформаций и наклейке на него датчика усталостного нагружения

Настоящая инструкция рекомендует порядок операций при изготовлении умножителя деформаций для датчика усталостного нагружения с базой 5 мм и наклейке на него датчика.

1. Материалы и оборудование.

- 1.1. Спирт этиловый, ГОСТ 18300–72.
- 1.2. Клей «Стык-6».
- 1.3. Клей «Циакрин ЭО», ТУ 6–09–30–76.
- 1.4. Марля медицинская.
- 1.5. Лента клейкая.
- 1.6. Парафин.
- 1.7. Резина листовая толщиной 1 мм.
- 1.8. Пленка фторопластовая толщиной 0,05 мм, ГОСТ 24222–80.
- 1.9. Скальпель.
- 1.10. Пинцет.
- 1.11. Штангенциркуль.
- 1.12. Ножницы.

1.13. Аппарат сварочный для точечной сварки.

1.14. Пресс-форма для изготовления умножителей (рис. 8.7.1 – крышка 2 и планка 3 сверху сняты).

1.15. Приспособление для наклейки датчиков (рис. 8.7.2).

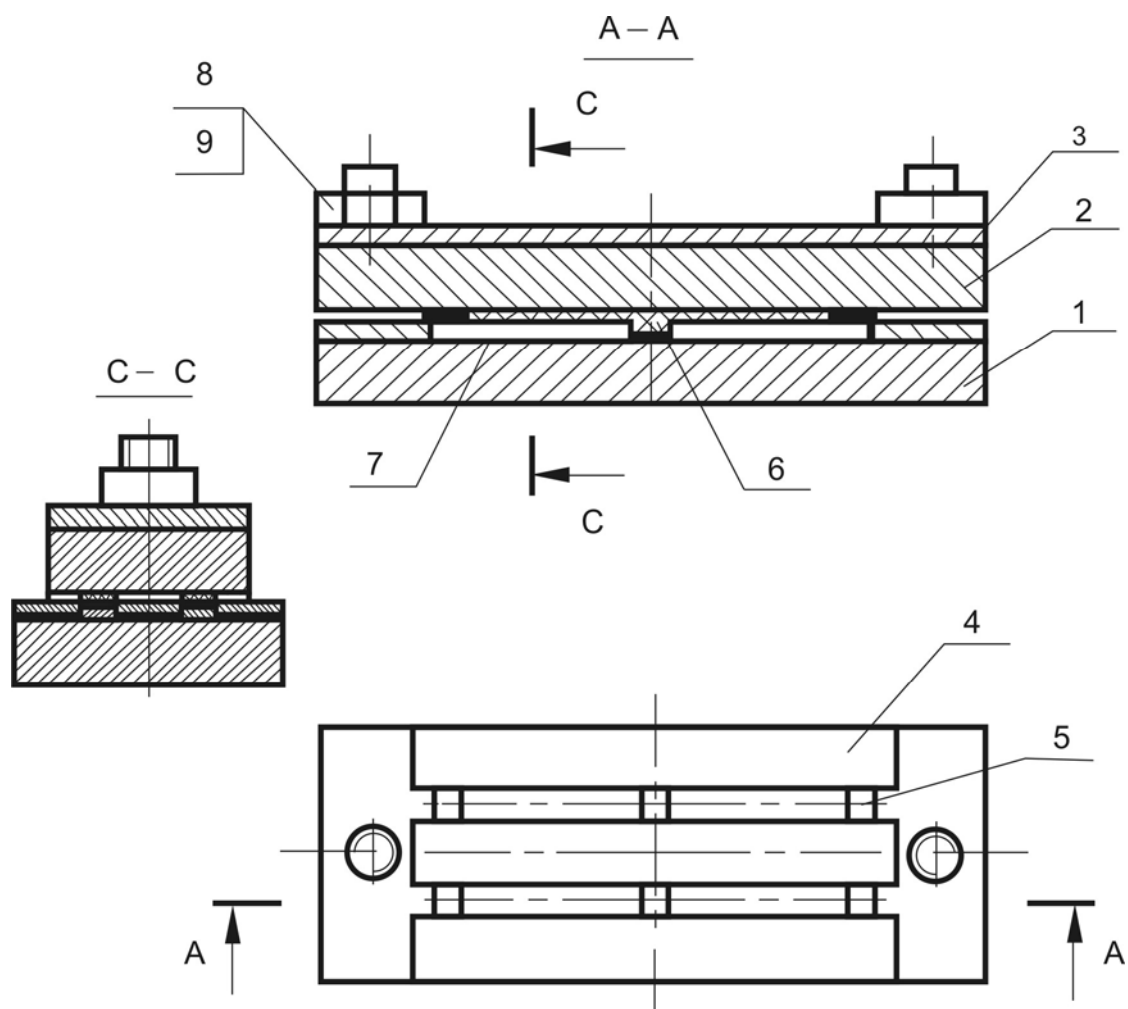


Рис. 8.7.1. Прессформа с умножителем в сборе:

1 – основание пресс-формы (оргстекло); 2 – крышка пресс-формы (оргстекло);
 3 – планка (сталь, 3 мм); 4 – пластина матрицы пресс-формы (сталь, 0,6 мм);
 5 – удлинительные пластины; 6 – наполнитель «Стык-6»; 7 – лента клейкая;
 8 – гайка; 9 – болт

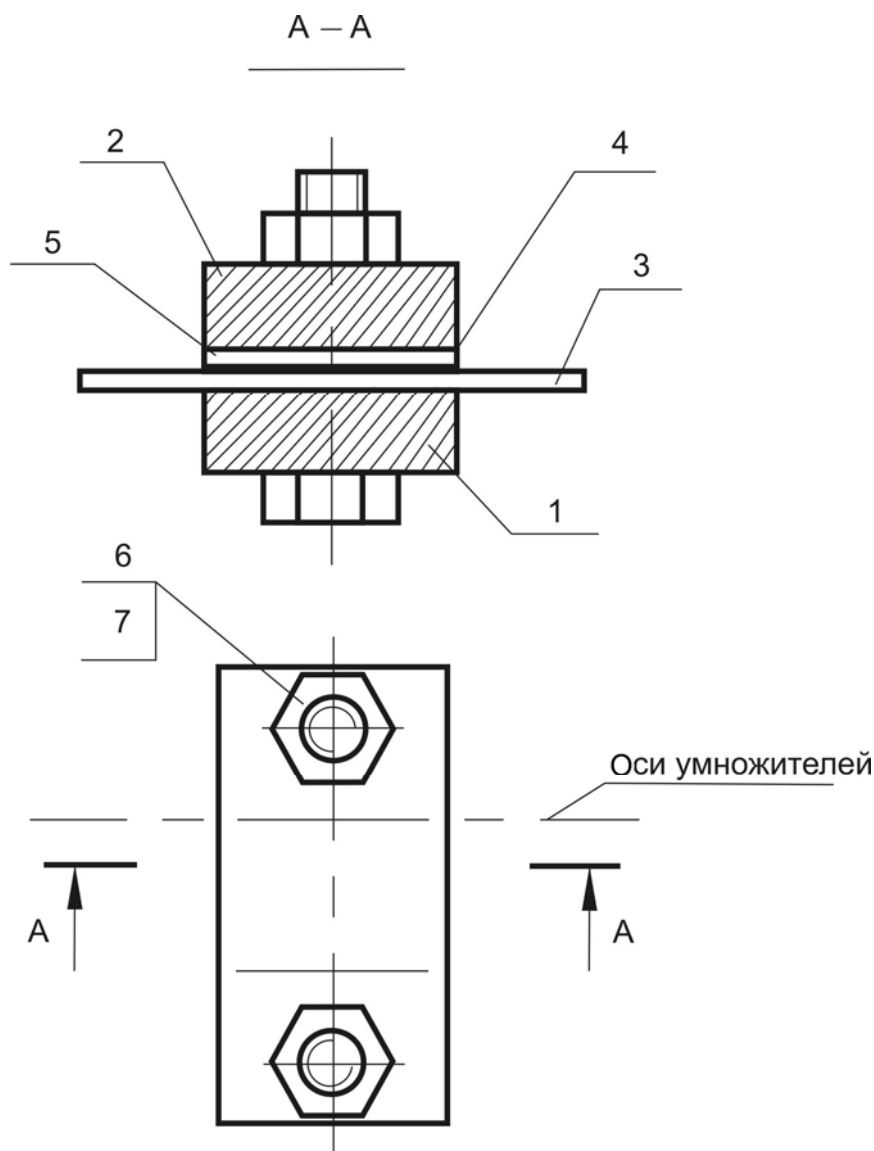


Рис. 8.7.2. Приспособление для наклейки датчика на умножитель:
 1, 2 – планка; 3 – умножитель с датчиком; 4 – пленка фторопластовая; 5 – резинка;
 6 – болт М8; 7 – гайка

2. Порядок изготовления умножителей.

2.1. Изготовить удлинительные пластины умножителей и монтажные пластины (см. рис. 8.5.1).

2.2. Обезжирить удлинительные пластины погружением их на 2–3 мин в спирт. Обезжиренные пластины извлечь из спирта, промокнуть чистой бумагой и просушить до полного испарения спирта.

2.3. Отрезать полосу клеящей ленты длиной по размеру умножителя и шириной 9 мм.

2.4. Пинцетом уложить удлинительные пластины на клейкую ленту, оставив расстояние между ними 4,5 мм, контролируемое с помощью штангенциркуля.

2.5. Обложить по бокам удлинительные пластины пластинами матрицы пресс-формы.

2.6. Установить полученный узел на основание пресс-формы.

2.7. Заполнить паз матрицы пресс-формы над удлинительными пластинами клеем «Стык-6».

2.8. Натереть парафином поверхности крышки пресс-формы, которые будут контактировать с клеем.

2.9. Накрыть крышкой пресс-формы удлинительные пластины. При этом излишки клея должны выступить по бокам крышки, а между крышкой и удлинительными пластинами не должно оставаться воздушных пузырей.

2.10. Накрыть крышку пресс-формы планкой и закрепить ее гайками.

2.11. Выдержать пресс-форму с умножителем при комнатной температуре в течение 5 суток до полной полимеризации клея.

2.12. Снять планку и крышку пресс-формы.

2.13. Отделить от умножителя клейкую ленту.

2.14. Концом скальпеля подрезать умножитель вдоль длинных сторон и отделить умножитель от пластин матрицы пресс-формы.

2.15. Обезжирить спиртом нижнюю поверхность эластичной перемычки умножителя и центральную монтажную пластину.

2.16. Нанести тонкий слой клея «Стык-6» на нижнюю поверхность эластичной перемычки и положить умножитель на монтажную пластину.

2.17. Умножитель с пластиной положить на основание пресс-формы и накрыть сначала фторопластовой пленкой, а затем листовой резиной.

2.18. Накрыть умножитель крышкой пресс-формы и планкой, зафиксировать винтами.

2.19. Выдержать при комнатной температуре в течение 3 суток до полной полимеризации клея.

2.20. Снять планку и крышку пресс-формы и освободить умножитель.

2.21. С помощью аппарата для точечной сварки приварить крайние монтажные пластины к умножителю (см. рис. 8.5.1).

3. Порядок наклейки датчика на умножитель деформаций.

3.1. Протереть тыльную сторону датчика марлевым тампоном, смоченным спиртом.

- 3.2. Просушить датчик до полного испарения спирта.
- 3.3. Нанести на тыльную сторону датчика слой клея толщиной 0,1–0,2 мм, выравнивая его деревянным стерженьком.
- 3.4. Положить датчик на умножитель таким образом, чтобы его фольговая решетка располагалась на эластичной перемычке, а подложка своими краями находила на удлинительные пластины.
- 3.5. Накрыть датчики фторопластовой пленкой и резиновой прокладкой из листовой резины.
- 3.6. Поместить умножитель в приспособление для наклейки датчика и закрепить его там гайками.
- 3.7. Выдержать умножитель с датчиком в приспособлении в течение 3 суток до полной полимеризации клея.
- 3.8. Освободить умножитель из приспособления.
- 3.9. Приклеить рядом с датчиком монтажную колодку, используя клей «Циакрин».
- 3.10. Припаять токовыводы датчика к монтажной колодке.

Библиографический список

1. *Байхельт Ф.* Надежность и техническое обслуживание. Математический подход / Ф. Байхельт, П. Франкен. Москва: Радио и связь, 1988. 392 с.
2. *Барзилович Е. Ю.* Эксплуатация авиационных систем по состоянию (элементы теории) / Е. Ю. Барзилович, В. Ф. Воскобоев. Москва: Транспорт, 1981. 197 с.
3. *Биргер И. А.* Детерминированные и статистические модели усталостной прочности / И. А. Биргер // Проблемы прочности. 1982. № 4. С. 24–28.
4. *Благовещенский Ю. Н.* Аксиоматическая теория накопления усталостных повреждений / Ю. Н. Благовещенский // Заводская лаборатория. 1972. № 3. С. 311–318.
5. *Богданофф Дж.* Вероятностные модели накопления повреждений / Дж. Богданофф, Ф. Козин. Москва: Мир, 1989. 344 с.
6. *Бойко В. И.* О выборе материала, конструкции и технологии изготовления датчика усталостного повреждения / В. И. Бойко // Заводская лаборатория. 1981. № 1. С. 79–82.
7. *Бойцов Б. В.* Прогнозирование долговечности напряженных конструкций. Комплексное исследование шасси самолета / Б. В. Бойцов. Москва: Машиностроение, 1985. 232 с.
8. *Болотин В. В.* К теории датчиков повреждений и счетчиков ресурса / В. В. Болотин, С. М. Набойщиков // Расчеты на прочность / под ред. Н. Д. Тарабасова. Вып. 24. С. 79–94.
9. *Болотин В. В.* Ресурс машин и конструкций / В. В. Болотин. Москва: Машиностроение, 1990. 448 с.
10. *Брауде В. И.* Надежность подъемно-транспортных машин / В. И. Брауде, Л. И. Семенов. Ленинград: Машиностроение, 1986. 231 с.
11. *Брауэр В.* Введение в теорию конечных автоматов / В. Брауэр. Москва: Радио и связь, 1987. 392 с.
12. *Бухараев Р. Г.* Основы теории вероятностных автоматов / Р. Г. Бухараев. Москва: Наука, 1985. 320 с.
13. *Васильев В. Г.* Обоснование скоростных параметров козловых кранов для работы с хлыстами: диссертация ... кандидата технических наук / В. Г. Васильев. Химки, 1990. 252 с.
14. *Волков С. Д.* Использование функций сопротивления при оценке долговечности конструкций / С. Д. Волков, В. И. Миронов // Деп. в ВИНТИ, 1978. № 1883–78.

15. *Вопросы математической теории надежности* / под ред. Б. В. Гнеденко. Москва: Радио и связь, 1983. 376 с.
16. *Герцбах И. В.* Модели отказов / И. В. Герцбах, Х. Б. Кордонский. Москва: Советское радио, 1966. 166 с.
17. *Герцбах И. В.* Модели профилактики / И. В. Герцбах. Москва: Советское радио, 1969. 216 с.
18. *Гладкий В. Ф.* Вероятностные методы проектирования конструкции летательного аппарата / В. Ф. Гладкий. Москва: Наука, 1982. 272 с.
19. *ГОСТ 25.101–83.* Расчеты и испытания на прочность. Методы схематизации случайных процессов нагружения элементов машин и конструкций и статистического представления результатов. Москва: Изд-во стандартов, 1984. 30 с.
20. *ГОСТ 25.504–82.* Расчеты и испытания на прочность. Методы расчета характеристик сопротивления усталости. Москва: Изд-во стандартов, 1982. 80 с.
21. *Гребеник В. М.* Надежность металлургического оборудования. Оценка эксплуатационной надежности и долговечности / В. М. Гребеник, В. Л. Цапко. Москва: Металлургия, 1989. 592 с.
22. *Гриненко Н. И.* Вероятностный метод расчета характеристик сопротивления усталости элементов конструкций / Н. И. Гриненко [и др.] // Проблемы прочности. 1987. № 9. С. 50–54.
23. *Гриненко Н. И.* Спектральный метод оценки усталостной долговечности при действии случайных нагрузок / Н. И. Гриненко, Л. И. Шефер // Проблемы прочности. 1976. № 1. С. 19–22.
24. *Гусев А. С.* О распределении амплитуд в широкополостных случайных процессах при схематизации их по методу полных циклов / А. С. Гусев // Машиноведение. 1974. № 1. С. 65–71.
25. *Гусев А. С.* Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках / А. С. Гусев. Москва: Машиностроение, 1989. 248 с.
26. *Даулинг Н. Е.* Расчет усталостной долговечности при сложных историях нагружения / Н. Е. Даулинг // Теоретические основы инженерных расчетов: труды американского общества инженеров-механиков. 1983. № 3. С. 69–80.
27. *Добромыслов Н. Н.* Применение датчиков повреждений для восстановления характеристик силовых нагруженности / Н. Н. Добромыслов, С. М. Набойщиков // Проблемы прочности. 1984. № 11. С. 88–93.

28. *Екобори Т.* Научные основы прочности и разрушения материалов / Т. Екобори. Киев: Наукова думка, 1978. 352 с.
29. *Заде Л.* Теория линейных систем. Метод пространства состояний / Л. Заде, Ч. Дезоер. Москва: Наука, 1970. 704 с.
30. *Казак С. А.* Безотказность и усталостная долговечность ПТМ / С. А. Казак. Свердловск: Изд-во Урал. политехн. ун-та, 1989. 92 с.
31. *Калмуцкий В. С.* Прогнозирование ресурса деталей машин и элементов конструкций / В. С. Калмуцкий. Кишинев: Штиинца, 1989. 160 с.
32. *Карташов Г. Д.* Аддитивно-марковские модели расходования ресурса / Г. Д. Карташов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. № 2. С. 53–58.
33. *Касаткин Б. С.* Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений: справочное пособие / Б. С. Касаткин, А. Б. Кудрин, А. М. Лобанов. Киев: Наукова думка, 1981. 584 с.
34. *Коваленко И. Н.* Современные методы проектирования систем автоматического управления / И. Н. Коваленко // Применение теории массового обслуживания к синтезу больших систем автоматического управления. Москва: Машиностроение, 1967. С. 639–657.
35. *Когаев В. П.* Прочность и износостойкость деталей машин / В. П. Когаев, Ю. Н. Дроздов. Москва: Высшая школа, 1991. 318 с.
36. *Когаев В. П.* Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность: справочник / В. П. Когаев, Н. А. Махутов, А. П. Гусенков. Москва: Машиностроение, 1985. 224 с.
37. *Кожушко Г. Г.* Механика деформирования и прогнозирования ресурса резиноканевых лент конвейеров горнорудных предприятий: диссертация ... доктора технических наук / Г. Г. Кожушко. Екатеринбург, 1992. 348 с.
38. *Кокс Д.* Теория восстановления / Д. Кокс, В. Смит. Москва: Советское радио, 1967. 299 с.
39. *Коллинз Дж.* Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение / Дж. Коллинз. Москва: Мир, 1984. 624 с.
40. *Коновалов Л. В.* Методы и практическая реализация обеспечения высокой конструкционной надежности деталей машин по критерию усталости / Л. В. Коновалов // Вестник машиностроения. 1992. № 2. С. 5–9.
41. *Коновалов Л. В.* Методы и практическая реализация обеспечения высокой конструкционной надежности деталей машин по критерию усталости / Л. В. Коновалов // Вестник машиностроения. 1992. № 3. С. 24–27.

42. *Копнов В. А.* Датчики усталостного повреждения / В. А. Копнов, С. А. Тимашев. Свердловск: Наука, 1992. 86 с.

43. *Кордонский Х. Б.* Исчисление времени деградации сложной системы / Х. Б. Кордонский // Динамика и прочность поврежденных конструкций авиационной техники: материалы 4-го Всесоюзного совещания, 26–28 апреля 1983 г. Москва, 1984. С. 182–189.

44. *Кордонский Х. Б.* Некоторые вопросы вероятностного описания усталостной долговечности / Х. Б. Кордонский, Я. Ф. Фридман // Заводская лаборатория. 1976. № 7. С. 829–847.

45. *Кордонский Х. Б.* Средства и методы оценивания остаточного ресурса / Х. Б. Кордонский // Расчет и управление надежностью больших механических систем: информационные материалы 6-й Всесоюзной школы по надежности. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1986. С. 18–24.

46. *Королюк В. С.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В. С. Королюк, А. Ф. Турбин. Киев: Наукова думка, 1982. 236 с.

47. *Кривошапко В. М.* Прогнозирование индивидуальной надежности высоконадежных изделий по наблюдениям деградации их параметров / В. М. Кривошапко // Надежность и контроль качества. 1985. № 4. С. 20–28.

48. *Либерман Я. Л.* Состояние и перспективы развития средств контроля и диагностики в станках с ЧПУ / Я. Л. Либерман, С. А. Тимашев. Москва: Изд-во ВНИИТМР, 1987. 40 с.

49. *Лидбеттер М.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов / М. Лидбеттер, Х. Ротсен, Г. Линдшрен. Москва: Мир, 1989. 392 с.

50. *Мадудин В. И.* Разработка счетчика накопления малоцикловых повреждений / В. И. Мадудин, Л. А. Пашихидина, О. С. Садаков // Конструкционная прочность двигателей / отв. ред. Н. Д. Кузнецов. Куйбышев, 1990. С. 88–90.

51. *Маньпин Г. Г.* Управление режимами профилактик сложных систем / Г. Г. Маньпин. Минск: Наука и техника, 1976. 256 с.

52. *Моломин В. П.* Модели управления надежностью авиационной техники / В. П. Моломин. Москва: Машиностроение, 1981. 200 с.

53. *МУ РД 50–398–83.* Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Методы механических испытаний. Планирование механических испытаний и статистическая обработка результатов. Москва: Изд-во стандартов, 1984. 240 с.

54. МУ РД 50–694–90. Надежность в технике. Вероятностный метод расчета на усталость сварных конструкций. Москва: Госстандарт, 1991. 84 с.

55. *Надежность* и эффективность в технике: справочник: в 10 томах. Т. 8. Эксплуатация и ремонт / под ред. В. И. Кузнецова, Е. Ю. Барзиловича. Москва: Машиностроение, 1990. 320 с.

56. *Надежность* и эффективность в технике: справочник: в 10 томах. Т. 9. Техническая диагностика / В. С. Авдеевский [и др.]. Москва: Машиностроение, 1987. 352 с.

57. Олейник Н. В. Выносливость деталей машин / Н. В. Олейник. Киев: Техника, 1985. 199 с.

58. Павлов П. А. Основы инженерных расчетов элементов машин на усталостную и длительную прочность / П. А. Павлов. Ленинград: Машиностроение, 1988. 252 с.

59. Петин С. В. Основы инженерных расчетов усталости судовых конструкций / С. В. Петин. Ленинград: Судостроение, 1990. 224 с.

60. Повреждение и пути совершенствования судовых конструкций / В. И. Барабанов [и др.]. Ленинград: Судостроение, 1989. 256 с.

61. Райхер В. Л. Гипотеза спектрального суммирования и ее применение для усталостной долговечности / В. Л. Райхер // Труды ЦАГИ. 1969. Вып. 1134. 30 с.

62. Райхер В. Л. Модели рассеяния усталостной долговечности, использующие понятие индивидуальных кривых сопротивления усталости / В. Л. Райхер // Расчет и управление надежностью больших механических систем: информационные материалы 6-й Всесоюзной школы по надежности. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1986. С. 35–41.

63. Райхер В. Л. О некоторых следствиях из двухпараметрической модели рассеяния долговечности / В. Л. Райхер // Ученые записки ЦАГИ. 1982. Т. 13, № 2. С. 130–133.

64. Роббинс Г. Теория оптимальных правил остановки / Г. Роббинс, Д. Сигмунд, И. Чао. Москва: Наука, 1977. 168 с.

65. Рубальский Г. Б. Управление запасами при случайном спросе (модели с непрерывным временем) / Г. Б. Рубальский. Москва: Советское радио, 1977. 160 с.

66. Северцев Н. А. Надежность сложных систем в эксплуатации и отработке. Москва: Высшая школа, 1989. 432 с.

67. Селихов А. Ф. Модель рассеяния долговечности элемента конструкции при нерегулярном нагружении / А. Ф. Селихов // Ученые записки ЦАГИ. 1984. Т. 15, № 3. С. 107–120.

68. Селихов А. Ф. Общая модель рассеяния сопротивления усталости при регулярном нагружении / А. Ф. Селихов // Ученые записки ЦАГИ. 1984. Т. 15, № 3. С. 57–71.

69. Серенсен С. В. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность: справочное пособие / С. В. Серенсен, В. П. Когаев, Р. М. Шнейдерович. Москва: Машиностроение, 1975. 485 с.

70. Сильвестров Д. С. Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний / Д. С. Сильвестров. Москва: Советское радио, 1980. 272 с.

71. Смирнов Н. Н. Обслуживание и ремонт авиационной техники по состоянию / Н. Н. Смирнов, А. А. Ицкевич. Москва: Транспорт, 1987. 272 с.

72. Сопротивление усталости элементов конструкций / А. З. Воробьев [и др.]. Москва: Машиностроение, 1990. 240 с.

73. Сосновский Л. А. Статистическая механика усталостного разрушения / Л. А. Сосновский. Минск: Наука и техника, 1987. 288 с.

74. Справочник по кранам: в 2 томах / под ред. М. М. Гохберга. Ленинград: Машиностроение, 1988. Т. 1. 536 с.

75. Стрельников В. П. Модели отказов механических объектов / В. П. Стрельников. Киев: Знание, 1982. 20 с.

76. Стрельников В. П. Приложение теории марковских процессов к исследованию усталостной долговечности / В. П. Стрельников // Проблемы прочности. 1986. № 2. С. 13–17.

77. Тимашев С. А. Концепция мониторинга больших механотронных систем / С. А. Тимашев // Информационные материалы 7-й Всесоюзной школы по надежности, Ташкент, 1988. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1988. С. 51–69.

78. Тимашев С. А. Надежность больших механических систем / С. А. Тимашев. Москва: Наука, 1982. 184 с.

79. Тимашев С. А. Надежность механических систем, снабженных мониторингом / С. А. Тимашев // Информационные материалы 6-й Всесоюзной школы по надежности, Залешики, 1986. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1986. С. 51–54.

80. Тимашев С. А. Оценка надежности стохастически корродируемых систем при действии нескольких случайных нагрузок / С. А. Тимашев,

В. А. Штерензон // Надежность и долговечность механических систем. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1982. С. 50–62.

81. *Тимашев С. А.* Постановка некоторых классов задач управления надежностью механических систем / С. А. Тимашев // Прогнозирование и расчет индивидуальной долговечности и надежности механических систем. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1980. С. 16–20.

82. *Тимашев С. А.* Управление надежностью механических систем / С. А. Тимашев // Надежность и долговечность механических систем. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1982. С. 15–49.

83. *Тожиев Р. Ж.* Исследование усталостных свойств резиноканевых конвейерных лент с целью повышения их долговечности: автореферат диссертации ... кандидата технических наук / Р. Ж. Тожиев. Киев, 1978. 22 с.

84. *Трощенко В. Т.* Датчик усталостного повреждения и обоснование его использования / В. Т. Трощенко, В. И. Бойко // Проблемы прочности. 1985. № 1. С. 3–13.

85. *Трощенко В. Т.* Сопротивление усталости металлов и сплавов: справочник: в 2 томах / В. Т. Трощенко, Л. А. Сосновский. Киев: Наукова думка, 1987. Т. 1, 2.

86. *Трощенко В. Т.* Умножитель деформаций для датчика усталостного повреждения / В. Т. Трощенко, С. Г. Орлов, В. И. Бойко // Проблемы прочности. 1987. № 8. С. 36–42.

87. *Хазов Б. Ф.* Справочник по расчету надежности машин на стадии проектирования / Б. Ф. Хазов, Б. А. Дидусев. Москва: Машиностроение, 1986. 224 с.

88. *Хевиленд Р.* Инженерная надежность и расчет на долговечность / Р. Хевиленд. Ленинград: Энергия, 1966. 232 с.

89. *Шамирзаев С. Х.* Полупроводниковые гетерогенные тензопреобразователи / С. Х. Шамирзаев. Ташкент: Изд-во ФТИ АН УзССР, 1987. 9 с.

90. *Шишков Н. А.* Надежность и безопасность грузоподъемных машин / Н. А. Шишков. Москва: Недра, 1990. 252 с.

91. *Юшкевич В. Н.* Способ вероятностного расчета пределов выносливости сварных соединений на ЭВМ / В. Н. Юшкевич, К. П. Манжула, С. А. Соколов // Металлические конструкции кранов. Исследование конвейеров. Ленинград: 1985. С. 2–13. Деп. в ЦНИИТЭИТяжмаш. № 1515ТМ-85.

92. *Яхнин Р. Н.* Ремонт металлоконструкций мостовых кранов. Москва: Металлургия, 1990. 96 с.

93. *Akaike H.* A new look at the statistical model identification / H. Akaike // IEEE Transaction on Automatic Control. AC-19(6). 1974. P. 716–720.
94. *Alles R.* Die Beanspruchung von Gummifdergurten und deren Rechnerische Erfassung / R. Alles // Braunkhole. 1989. № 33. P. 350–354.
95. *Anderson T. W.* Statistical inference about Markov chains / T. W. Anderson, L. A. Goodman // The Annals of mathematical Statistics. 1957. № 28. P. 89–110.
96. *Avakov V. A.* Fatigue Reliability Functions / V. A. Avakov // Transactions. ASME. Journal of Vibration, Acoustic, Stress, and Reliability in Design. 1989. Vol. 111, № 4. P. 343–455.
97. *Barker H. A.* The Object-oriented Paradigm: a Means for Revolutionising Software Development / H. A. Barker // Computer & Control Engineering Journal. 1993. Vol. 4, № 1. P. 10–14.
98. *Beckmann M. J.* Optimal replacement policy for a redundant system / M. J. Beckmann, R. Subramanian // OR Spectrum. 1984. Vol. 6, № 1. P. 47–51.
99. *Bergman B.* Optimal Replacement with Semi-Markov Shock Models / B. Bergman // Journal of Applied Probability. 1984. № 10. P. 431–451.
100. *Birnbaum Z. W.* A probabilistic Interpretation of Miner's rule / Z. W. Birnbaum, S. C. Saunders // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1968. № 16. P. 637–652.
101. *Bishop N. W. M.* A Theoretical Solution for the Estimation of «rain-flow» Ranges from Spectral Density Data / N. W. M. Bishop, F. Sherratt // Fatigue Fract. Engng Mater. Struct. 1990. Vol. 13, № 4. P. 311–326.
102. *Bolotin V. V.* Handook of Composites / V. V. Bolotin. Amsterdam: Elsevier, 1988. V. 2. P. 263–349.
103. *Breidenbach R. F.* Mechanics of fracture in two-ply laminates / R. F. Breidenbach, G. J. Lake // Rubber Chemistry and Technology. 1979. № 52. P. 96–109.
104. *Ditlevsen O.* Random fatigue crack growth – first passage problem / O. Ditlevsen // Engineering Fracture Mechanics. 1986. V. 23, № 2. P. 467–477.
105. *Dolan T. J.* Effect of prior prestressing on the fatigue Life of 75S-T Aluminium / T. J. Dolan, H. F. Brown // Proceedings ASTM. 1952. Vol. 52. P. 733–740.
106. *Dowdell D. J.* Fatigue Life Predictions for Discrete Strain Markov Processes / D. J. Dowdell, H. H. Leipholz, T. H. Topper // International Journal of Fatigue. 1987. Vol. 10, № 4. P. 227–236.

107. *Dowling N. E.* Fatigue predictions for complicated stress-strain histories / N. E. Dowling // Journal of Materials. 1972. № 1. P. 71–87.
108. *Downing S. D.* Simple rainflow counting algorithms / S. D. Downing, D. F. Socie // International Journal of Fatigue. 1982. Vol. 4, № 1. P. 31–40.
109. *Flebbe H.* Prufting der Dynamischen Beanspruchbarkeit von Fordergurtverbindungen: Doctor Thesis Von der Fakultat für Maschinenwesen der Universität Hannover / H. Flebbe. Hannover, 1984.
110. *Gatts R. R.* Application of a cumulative damage concept to fatigue / R. R. Gatts // ASME Transactions. 1961. P. 529–542.
111. *Glinka G.* Fatigue analysis of excavator of service stress spectra / G. Glinka // Measurement and Fatigue. 1986. P. 385–397.
112. *Glinka G.* Rainflow counting algorithm for very long stress histories / G. Glinka, J. C. P. Kam // International Journal of Fatigue. 1982. Vol. 4, № 1. P. 31–40.
113. *Gottlieb G.* Optimal Replacement with Semi-Markov Shock Models / G. Gottlieb, D. Zevikson // Journal of Applied Probability. 1984. № 10. P. 431–451.
114. *Holm S.* A Simple Model for Fatigue Life / S. Holm, De J. Mare // IEEE Trans. On Reliability. 1988. Vol. 37, № 3. P. 314–322.
115. *Khosrovaneh A. K.* Fatigue Loading History Reconstruction Based on the Rainflow Technique / A. K. Khosrovaneh, N. E. Dowling // International Journal of Fatigue. 1990. Vol. 12, № 2. P. 99–106.
116. *Ledermann W.* Handbook of applicable mathematics / W. Ledermann, E. Lloyd. New York: John Wiley and Sons, 1984. Vol. 6. 4390 p.
117. *Lin Y. K.* A stochastic theory of fatigue crack propagation / Y. K. Lin, J. N. Yang // AIAA Journal. 1985. Vol. 23, № 1. P. 117–121.
118. *Lu X.-M.* An Algebraic Theory of Object-oriented Systems / X.-M. Lu, T. S. Dillon // IEEE Transactions Knowledge & Data Engineering. 1994. Vol. 6, № 3. P. 412–419.
119. *Lutes L. D.* Stochastic fatigue damage accumulation / L. D. Lutes, M. Corrao, S. J. Hu, J. Zimmerman // Journal of Structural Engineering. 1984. Vol. 110, № 11. P. 2585–2601.
120. *Mamoru O.* Replacement policy for components in a Markovian deteriorating system with minimal repair / O. Mamoru // Journal of Operation Research Society. Japan. 1986. Vol. 29, № 4. P. 249–255.
121. *Marco S. M.* A concept of fatigue damage / S. M. Marco, W. L. Starkey // ASME Transactions. 1954. № 76. P. 627–654.

122. *Marin J.* The effect of stress cycling on the properties of SAE 4340 steel / J. Marin, P. Borachia, U. A. Rimrott // *Proceedings of ASTM*. 1959. № 68. P. 662–673.

123. *Matsuishi M.* Fatigue of metals subjected to varying stress / M. Matsuishi, T. Endo // Paper presented to Japan Society of Mechanical Engineers. Fukuoka, Japan, 1968. P. 37–40.

124. *Nakagawa T.* Reliability analysis of fatigue crack propagation life by Markov chain / T. Nakagawa, Y. Shimada, H. Tokuno // *Proceedings of ICOSSAR'85*, Kobe, Japan, 1985, May 27–29. 1985. Vol. 1. P. 455–463.

125. *Oh K. P.* A diffusion model for fatigue crack growth / K. P. Oh // *Proceedings of Royal Society*. London. 1977. Vol. A-367. P. 47–58.

126. *Okamura H.* Cumulative fatigue damage under random loads / H. Okamura, S. Sakai, I. Suzuki // *Fatigue of Engineering Materials and Structures*. 1979. № 1. P. 409–419.

127. *Oswald G.* On the reliability of the deteriorating systems / G. Oswald, G. I. Schueller // 4th International Conference on Application of Statistics and Probability in Soil & Structural Engineering. Universita di Firenze. Italy, 1983. P. 597–608.

128. *Richart F. E.* An Hypothesis for the Determination of Cumulative Damage in Fatigue / F. E. Richart, N. M. Newmark // *Proceedings ASTM*. 1948. Vol. 48. P. 767–798.

129. *Rubenking N. J.* Turbo Pascal for Windows. Techniques and Utilities / N. J. Rubenking. California: Ziff-Davis Press Emerville, 1992. 925 s.

130. *Rychlik I.* A new definition of the rain flow cycle counting method / I. Rychlik // *International Journal of Fatigue*. 1987. Vol. 9, № 2. P. 119–121.

131. *Rychlik I.* Note on Cycle Counts in Irregular Loads / I. Rychlik // *Fatigue Fracture of Engineering Materials and Structures*. 1993. № 16. P. 377–390.

132. *Rychlik I.* Rain flow cycle distribution for a stationary Gaussian loadprocesses / I. Rychlik // *Statistical Research Report University of Lund*. Sweden, 1986. № 4. P. 1–36.

133. *Sachs G.* Effect of strain at fracture / G. Sachs // *Fracturing of Metals*. 1948. № 1. P. 51–67.

134. *Sakai T.* Statistical analysis of fatigue behavior of spot-welded joint in tension – shear – type loading / T. Sakai // *International Journal of Fatigue*. 1989. Vol. 11, № 4. P. 269–275.

135. *Shimokawa T.* A statistical consideration of Miner's rule / T. Shimokawa, S. Tanaka // *International Journal of Fatigue*. 1980. Vol. 2, № 5. P. 165–170.
136. *Shimokawa T.* Distribution of Fatigue Life and Fatigue Strength in Notched Specimens of Carbon Eight-Harness-Satin Laminate / T. Shimokawa, Y. Hamaguchi // *Journal Composite Material*. 1983. № 17. P. 64–76.
137. *Sivazlian B. D.* Optimum scheduling of a new maintenance program under stochastic degradation / B. D. Sivazlian // *Microelectronics and Reliability*. 1989. Vol. 29, № 1. P. 57–71.
138. *Sobczyk K.* On the Markovian models for fatigue accumulation / K. Sobczyk // *Journal de Mecanique Theorique et Applique*. 1982. № 1. P. 147–160.
139. *Socie D. F.* Fatigue-life prediction using stress / strain concepts / D. F. Socie // *Experimental Mechanics*. 1977. Vol. 17, № 2. P. 50–56.
140. *Solin J.* Methods for comparing fatigue live for spectrum loading / J. Solin // *International Journal of Fatigue*. 1990. Vol. 12, № 1. P. 35–42.
141. *Sounders S. C.* A probabilistic interpretation of Miner's rule II / S. C. Sounders // *SIAM Journal of Applied Mathematics*. 1970. Vol. 19, № 1. P. 251–265.
142. *Topper T. H.* Neuber's rule applied to fatigue of notched specimens / T. H. Topper, R. M. Wetzell, J. Morrow // *Journal of Materials*. 1969. Vol. 4, № 1. P. 200–209.
143. *Yukio H.* On Markov Maintenance Problems / H. Yukio // *IEEE Transactions on Reliability*. 1984. Vol. R-33, № 4. P. 280–283.